K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1992

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

Российская академия наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

8
АВГУСТ
1992

·Наука·Москва

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

Адрес редакции: 117806. ГСП. Москва, В-342, Профсоюзная ул., 65

Тел. 334-87-70

Зав. редакцией *П.Е. Шрага*

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), Avtomatika i Telemekhanika (Journal of Automation and Remote Control), No. 8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp. 1121-1140, 1993.

УДК 62-504.12

П.И. АНТСАКЛИС, профессор,
А.Н. МИШЕЛЬ, профессор,
К.М. ПАССИНО
(Университет Нотр Дам, США)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ КЛАССА СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ СОБЫТИЙ[1]

Системы дискретных событий (СДС) представляют собой динамические системы, которые развиваются во времени путем возникновения событий через возможно нерегулярные промежутки времени. "Логические" СДС — это класс СДС с дискретным временем, уравнения движения которых в большинстве случаев являются нелинейными и разрывными. Разрывы есть следствие событий. В последнее время большой интерес проявляется к изучению свойств устойчивости логических СДС. Было предложено несколько определений устойчивости и методов анализа устойчивости таких систем.

В настоящей работе рассматривается модель логической СДС и приводится определение *устойчивости по Ляпунову* для логических СДС. Показано, что для логических СДС может быть использован общепринятый метод анализа устойчивости при помощи соответствующих функций Ляпунова. Этот стандартный метод имеет то преимущество, что он не требует вычислений большой сложности (как некоторые другие методы), однако трудность его использования связана с выбором нужной функции Ляпунова. Предложенный метод проиллюстрирован на производственной системе, которая производит обработку партий N различных типов деталей согласно схеме приоритетов, на одной из "самостабилизирующихся" распределений систем Дийкстры и на задаче балансировки загрузки в вычислительных сетях.

1. Введение

Системы дискретных событий (СДС) представляют собой динамические системы, которые развиваются во времени путем возникновения событий через возможно нерегулярные промежутки времени. Примерами таких систем являются гибкие производственные системы, вычислительные сети, логические цепи и транспортные системы. "Логические" СДС — это класс дискретных по времени СДС, уравнения движения которых в большинстве случаев являются нелинейными и разрывными по отношению к возникновению событий. В последнее время большой интерес проявляется к изучению свойств устойчивости логических СДС. Было предложено несколько определений устойчивости и методов анализа устойчивости таких систем. В настоящей работе рассматривается модель логической СДС и приводится определение *устойчивости по Ляпунову* для логических СДС. Показано, что в рассматриваемом случае применима общая теория устойчивости в метрических пространствах, развитая в [30]. Поэтому для логических СДС может быть использован общепринятый метод анализа устойчивости при помощи соответствующих функций Ляпунова. Важным преимуществом метода Ляпунова является то, что он не требует большой вычислительной сложности (как некоторые другие новые методы), однако трудность его использования заключается в определении функции Ляпунова. Предложенный метод проиллюстрирован на производственной системе, которая производит обработку партий N различных типов деталей согласно схеме приоритетов, на одной из "самостабилизирующихся" распреде-

[1] Перевод с английского В.О. Головина и А.П. Молчанова.

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

ленных систем Дийкстры [7] и на "задаче балансировки загрузки" в вычислительны сетях. Настоящая работа представляет собой расширенный вариант работы [23].

Основой для изучения свойств устойчивости логических СДС является обща теория устойчивости (этот метод использован в настоящей работе) и теоретическа информатика (недавние теоретические исследования СДС). Ниже приводится обзс этих методов исследования, причем основное внимание уделяется устойчивости СД

Двумя (связанными) основными разделами теоретической информатики, которь имеют отношение к теоретическим исследованиям устойчивости логических СД являются временная логика и теория автоматов. Основываясь на интуиции, во време ной логике или в теории автоматов система рассматривается как *устойчивая* в некот ром смысле, если 1) для некоторого множества начальных состояний состояние сист мы гарантированно попадает в заданное множество состояний и остается в нем навсе да или 2) для некоторого множества начальных состояний состояние системы гарант рованно входит в заданное множество состояний бесконечно часто.

Во временной логике характеристики устойчивости в большинстве случаев пре ставлены в виде временных формул линейного или ветвящегося во времени язы (модальная логика), а для проверки выполнения временной формулы использует или система доказательств, или эффективная процедура. Тот факт, что приведенн выше понятия устойчивости можно изучать при помощи временной логики в теор управления, был впервые обнаружен в [9]. Линейная во времени временная логи [15], в которой используется система доказательств, применяется к доказательст свойств устойчивости в теории СДС в [28]. Линейная во времени временная логик где используются эффективные процедуры для проверки выполнения формул, опис вающих свойства устойчивости, рассматривается в [11, 12]. Как система дока тельств, так и эффективные алгоритмы проверки выполнения временных формул "реальном времени" рассматриваются в [18]. Метод ветвления во времени временн логики применяется к теории СДС в [5], а в [22] используются эффективные ал ритмы для изучения свойств устойчивости.

Понятия устойчивости логических СДС, таких, как конечные автоматы, име основание, например, в работах Бучи и Мюллера [4, 17] по автоматам, где также р сматривается, как эти автоматы принимают бесконечные строки. Работы по теор автоматов в информатике были также использованы для изучения устойчивости С В [20] авторы вводят некоторую специальную модель СДС (конечный автомат) используют метод пространства состояний для получения эффективных алгоритм исследования двух типов устойчивости, описанных выше. Ими также предложе методы, позволяющие синтезировать стабилизирующие регуляторы для СДС и исс довать различные другие характеристики логических СДС (более подробно см. [19 Близкие исследования содержатся в работах [3, 26]. Построение стабилизирую регуляторов также изучалось в рамках сетей Петри в [13]. Метод Крогга осно на подходе Рамаджа–Вонхама [27]. Результаты Рамаджа–Вонхама могут быть так использованы при изучении типов устойчивости логических СДС.

При изучении свойств устойчивости логических СДС могут быть использова некоторые общие результаты по исследованию устойчивости. Например, в [29] изу лась устойчивость асинхронных итеративных процессов. Тситсиклис определяет моде которая может представлять логические СДС, и в предположении, что СДС им определенные временные характеристики, он предлагает конструктивные мет исследования устойчивости класса СДС. Тситсиклис устанавливает связь между работой и использованием функций Ляпунова, а также предлагает некоторые эфф тивные процедуры проверки устойчивости. Введение в общую теорию устойчив и обзор таких исследований см. в [16]. Наконец, говоря об исследованиях СДС, от тим, что в последние годы в работах [24, 14] были получены существенные результ в изучении свойств устойчивости производственных систем.

В разделе 2 вводится модель логической СДС и проводится ее сравнение с некото ми другими моделями, что помогает характеризовать класс систем, который вводи и изучается в настоящей работе. В разделе 3 определяется устойчивость по Ляпун

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1421-1140, 1993.

для СДС и приводятся необходимые и достаточные условия устойчивости инвариантных множеств СДС в метрическом пространстве. Применения приведены в разделе 4, а выводы – в разделе 5.

2. Модель системы дискретных событий

Будем рассматривать свойства устойчивости систем дискретных событий, которые можно формально представить при помощи следующей модели:

(1) $$G = (\mathfrak{X}, \mathfrak{E}, f_e, g, \mathrm{E}_v),$$

где $\mathfrak{X}$ – множество состояний $\mathfrak{E}$ – множество *событий*,

(2) $$f_e: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$

операторы для $e \in \mathfrak{E}$,

(3) $$g: \mathfrak{X} \to \mathbf{P}(\mathfrak{E}) - \{\phi\}$$

– *функция реализации*, $\mathrm{E}_v \subset \mathfrak{E}^{\mathbf{N}}$ – множество *траекторий действительных событий*. Здесь для произвольного множества Z через $\mathbf{P}(Z)$ обозначается совокупность всех подмножеств множества Z. Единственное требование состоит в том, чтобы $f_e(x)$ было определено, когда $e \in g(x)$. С состояниями и событиями связываются индексы "времени" так, что $x_k \in \mathfrak{X}$ представляет состояние в момент времени $k \in \mathbf{N}$, а $e_k \in \mathfrak{E}$ представляет реализованное событие в момент времени $k \in \mathbf{N}$, если $e_k \in g(x_k)$. Если в состоянии $x_k \in \mathfrak{X}$ в момент времени $k \in \mathbf{N}$ происходит событие $e_k \in \mathfrak{E}$ (случайно, но не обязательно в соответствии с некоторой статистикой), то следующее состояние x_{k+1} задается применением оператора f_{e_k}, т.е. $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$. События могут происходить только, если они расположены на траекториях действительных событий, о чем говорится далее.

Любая последовательность $\{x_k\} \in \mathfrak{X}^{\mathbf{N}}$, такая, что при всех k $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$, где $e_k \in g(x_k)$, является *траекторией состояний*. Множество всех *траекторий событий*, обозначаемое через E, состоит из таких последовательностей $\{e_k\} \in \mathfrak{E}^{\mathbf{N}}$, что существует траектория состояний $\{x_k\} \in \mathfrak{X}^{\mathbf{N}}$, для которой $e_k \in g(x_k)$ при всех k. Следовательно, каждой траектории событий, которая определяет порядок применения операторов f_e, соответствует единственная траектория состояний (однако в общем случае не наоборот). Множество *траекторий действительных событий* $\mathrm{E}_v \subset \mathrm{E}$ представляет траектории событий, которые физически возможны в G. Следовательно, даже если $x_k \in \mathfrak{X}$ и $e_k \in g(x_k)$, то может случиться, что e_k не происходит, если оно не находится на траектории действительных событий, которая проходит через x'_{k+1}, где $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$. В разделе 4 будет показано, что использование E_v может упростить моделирование многих СДС и облегчить исследование свойств устойчивости. Через $\mathrm{E}_v(x_0) \subset \mathrm{E}_v$ обозначается множество всевозможных траекторий действительных событий, которые начинаются из состояния $x_0 \in \mathfrak{X}$. Ниже будет также использоваться специальное множество *траекторий допустимых событий*, которое обозначается через E_a, где $\mathrm{E}_a \subset \mathrm{E}_v$. Множество траекторий допустимых событий, которые начинаются из состояния $x_0 \in \mathfrak{X}$, обозначается через $\mathrm{E}_a(x_0)$.

Через E_k для фиксированного $k \in \mathbf{N}$ обозначим последовательность k событий, которые произошли (по определению $\mathrm{E}_0 \neq \phi$). Если $\mathrm{E}_k = e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$, то через $\mathrm{E}_k\mathrm{E} \in \mathrm{E}_v(x_0)$ обозначается *сцепление* E_k и бесконечной последовательности $\mathrm{E} = e_k, e_{k+1}, \ldots$, т.е. $\mathrm{E}_k\mathrm{E} = e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \ldots$ Функция $X(x_0, \mathrm{E}_k, k)$ используется для обозначения состояния, достигнутого из $x_0 \in \mathrm{X}$ путем применения последовательности событий E_k, такой, что $\mathrm{E}_k\mathrm{E} \in \mathrm{E}_v(x_0)$. (По определению $X(x_0, \phi, 0) = x_0$ для всех $x_0 \in \mathfrak{X}$.) Для фиксированных x_0 и E_k $X(x_0, \mathrm{E}_k, k)$ называется *движением*. Предположим, что для всех $x_0 \in \mathfrak{X}$, если $\mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k'}, \mathrm{E} \in \mathrm{E}_v(x_0)$, имеет место

(4) $$X(X(x_0, \mathrm{E}_k, k), \mathrm{E}_{k'}, k') = X(x_0, \mathrm{E}_{k+k'}, k+k')$$

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

при всех $k, k' \in \mathbf{N}$ таких, что $k' \geqslant k$, где $E_{k+k'} = E_k E_{k'}$. Это свойство представляет собой стандартное полугрупповое свойство динамических систем.

Замечание 1. Любая система, которая может быть представлена при помощи общей и расширенной сетей Петри [25], может быть также представлена моделью СДС (1) (Чтобы убедиться в этом, выберем $\mathfrak{X} = \mathbf{N}^n$, где n – число мест, переходы будут пред ставлять собой события, g определяет, каким образом *происходят* переходы, а f_e опре деляет, что происходит, когда переходы *возбуждаются*.)

Существует много моделей, которые сравнивались с общей и расширенной сетями Петри, так что это помогает характеризовать общность рассматриваемой модели отно сительно других моделей логических СДС [25, 21]. Замечание 1 показывает, что рас сматриваемая модель логической СДС является достаточно общей и, следовательно результаты настоящей работы можно применять к широкому классу СДС.

3. Необходимые и достаточные условия устойчивости инвариантных множеств СДС в метрическом пространстве

В этом разделе развитая в [30] теория применяется к исследованию свойств устой чивости систем, представленных моделью логической СДС, рассмотренной выше. Пуст $\rho: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbf{R}$ обозначает *метрику* в $\mathfrak{X}$, а $\{\mathfrak{X}; \rho\}$ – *метрическое пространство.* Пуст $\mathfrak{X}_Z \subset \mathfrak{X}$ и $\rho(x, X_Z) = \inf \{\rho(x, x') : x' \in \mathfrak{X}_Z\}$ обозначает расстояние от точки x до мно жества $\mathfrak{X}_Z$. Под *функционалом* будем понимать отображение произвольного множеств в $\mathbf{R}$.

Определение 1. Под *r-окрестностью* произвольного множества $\mathfrak{X}_Z \subseteq \mathfrak{X}$ понимаетс множество $S(\mathfrak{X}_Z; r) = \{x \in \mathfrak{X} : 0 < \rho(x, \mathfrak{X}_Z) < r\}$, где $r > 0$.

Определение 2. Множество $X_m \subset X$ называется *инвариантным* относительно (если из $x_0 \in X_m$ следует, что $X(x_0, E_k, k) \in X_m$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_v(x_0$ и $k \in \mathbf{N}$.

Определение 3. Замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G называетс *устойчивым по Ляпунову относительно* E_a, если для любого $\epsilon > 0$ можно найти тако $\delta > 0$, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$ будет $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \epsilon$ для всех E_k, таких, чт $E_k E \in E_a(x_0)$, и $k \in \mathbf{N}$. Если, кроме того, $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) \to 0$ при $k \to \infty$ для все E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$, то замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m$ системы называется *асимптотически устойчивым относительно* E_a.

Определение 4. Замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G называетс *неустойчивым по Ляпунову относительно* E_a, если оно не является устойчивым по Л пунову относительно E_a.

Определение 5. Если замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G асим тотически устойчиво по Ляпунову относительно E_a, то совокупность $\mathfrak{X}_a$ всех состо ний $x_0 \in \mathfrak{X}$ и $x_0 \notin \mathfrak{X}_m$, обладающих свойством $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) \to 0$ при $k \to \infty$ д всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$, называется *областью асимптотической устойчивос множества* $\mathfrak{X}_m$ *относительно* E_a.

Определение 6. Замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G с област асимптотической устойчивости $\mathfrak{X}_a$ относительно E_a называется *асимптотически усто чивым в целом относительно* E_a, если $\mathfrak{X}_a = \mathfrak{X}$.

Замечание 2. Приведенные выше определения дают общепринятую характеристи устойчивости для логических СДС. Во введении приводится обзор еще нескольк недавних исследований различных типов устойчивости логических СДС.

Замечание 3. Пусть $\mathfrak{X}_0$ обозначает множество всех возможных начальных состо ний и пусть $\mathfrak{X}_m$ содержит элементы всех движений $X(x_0, E_k, k)$, такие, что $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ E_k удовлетворяет соотношению $E_k E \in E_a(x_0)$. Изучение устойчивости этого инвариа ного множества $\mathfrak{X}_m$ аналогично изучению "орбитальной устойчивости" в [10]. (Д этого инвариантного множества можно было бы также предположить, что каждое этих движений входит в некоторое заранее заданное множество $\mathfrak{X}_s \subset \mathfrak{X}_m$ бесконе часто или что эти движения удовлетворяют некоторому другому свойству.)

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp. 1121-1140, 1993.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия устойчивости СДС, определенной в (1).

Теорема 1. Для того чтобы замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G было устойчиво по Ляпунову относительно E_a, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал V, заданный в некоторой достаточно малой окрестности $S(\mathfrak{X}_m; r)$ множества $\mathfrak{X}_m$, обладающий следующими свойствами:

1) для достаточно малого $c_1 \geqslant 0$ можно найти $c_2 > 0$, такое, что $V(x) > c_2$ при $x \in S(\mathfrak{X}_m; r)$ и $\rho(x, \mathfrak{X}_m) > c_1$;

2) для любого сколь угодно малого $c_4 \geqslant 0$ можно найти $c_3 > 0$, столь малое, что при $\rho(x, \mathfrak{X}_m) < c_3$ для всех $x \in S(\mathfrak{X}_m; r)$ будет $V(x) \leqslant c_4$;

3) $V(X(x_0, E_k, k))$ является невозрастающей функцией при $k \in \mathbf{N}$, $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; r)$ для всех $k \in \mathbf{N}$, пока $X(x_0, E_k, k) \in S(\mathfrak{X}_m; r)$, и для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ устойчиво по Ляпунову относительно E_a. Покажем, что условия теоремы 1 выполнены. Выберем некоторое $\epsilon > 0$. Согласно определению 3, найдется некоторое $\delta > 0$, такое, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$ будет $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \epsilon$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ и $k \in \mathbf{N}$. Положим

$$V(x_0) = \sup\{\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m): \ \forall E_k, E_k E \in E_a(x_0) \text{ и } k \in \mathbf{N}\}.$$

Это определяет функционал $V(x_0)$ для $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$.

1. Функционал $V(x_0)$ удовлетворяет условию 1, так как $V(x_0) \geqslant \rho(x_0, \mathfrak{X}_m)$, откуда следует, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) > c_1$, $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$ и $c_1 = c_2$ получим $V(x_0) > c_2$.

2. Для $c_4 > 0$ можно найти $c_3 > 0$, такое, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < c_3$ будет $\rho(X(x_0, E_k, \kappa), \mathfrak{X}_m) < c_4$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ и $k \in \mathbf{N}$. Следовательно,

$$\sup\{\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m): \ \forall E_k, E_k E \in E_a(x_0) \text{ и } k \in \mathbf{N}\} \leqslant c_4.$$

Поэтому $V(x_0) \leqslant c_4$ для $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < c_3$; таким образом, выполнено условие 2.

3. Пусть $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$, тогда для всех $k \in \mathbf{N}$, таких, что $k \in [0, T)$, и всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$, будем иметь $X(x_0, E_k, k) \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$. Следовательно, определено значение функционала в любой точке $X(x_0, E_{k'}, k')$, где $k' \in \mathbf{N}$ и $k' \in [0, T)$ для всех $E_{k'}$, таких, что $E_{k'} E \in E_a(x_0)$. Заметим, что

$$V(X(x_0, E_{k'}, k')) = \sup\{\rho(X(X(x_0, E_{k'}, k'), E_k, k), \mathfrak{X}_m): \forall E_k,$$
$$E_k E \in E_a(X(x_0, E_{k'}, k')), \forall k \in \mathbf{N}\},$$

из соотношения (4) следует, что

$$V(X(x_0, E_{k'}, k')) = \sup\{\rho(X(x_0, E_{k'+k}, k'+k), \mathfrak{X}_m): \forall E_k,$$
$$E_k E \in E_a(X(x_0, E_{k'}, k')), \forall k \in \mathbf{N}\} = \sup\{\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m): \forall E_k,$$
$$E_k E \in E_a(X(x_0, E_{k'}, k')) \text{ и } k \geqslant k'\} \leqslant \sup\{\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m): \forall E_k,$$
$$E_k E \in E_a(x_0) \text{ и } k \in \mathbf{N}\} = V(x_0).$$

Следовательно, $V(X(x_0, E_{k'}, k')) \leqslant V(x_0)$ для достаточно малых $k' > 0$ ($k' \in [0, T)$), так что $X(x_0, E_{k'}, k') \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности $S(\mathfrak{X}_m; r)$ существует функционал V, обладающий свойствами 1, 2 и 3. Покажем, что замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ устойчиво по Ляпунову относительно E_a. Выберем $\epsilon > 0$ и $\epsilon < r$ и положим

$$\lambda = \inf\{V(x): \ x \in \mathfrak{X}, \ \rho(x, \mathfrak{X}_m) = \epsilon\}.$$

Можно предположить, что ϵ выбрано таким образом, что множество $V(x): x \in \mathfrak{X}$, $\rho(x, \mathfrak{X}_m) = \epsilon$ не пусто. В силу свойства 1 имеем $\lambda > 0$. Из свойства 2 следует, что для λ можно найти $\delta > 0$, такое, что при $\rho(x, \mathfrak{X}_m) < \delta$ будет $V(x) < \lambda$ при всех $x \in S(\mathfrak{X}_m; r)$. Покажем, что найденное таким образом $\delta > 0$ соответствует выбранному $\epsilon > 0$, т.е. при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$ будет $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \epsilon$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ и $k \in \mathbf{N}$. Предположим противное, а именно: пусть существует точка $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$,

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

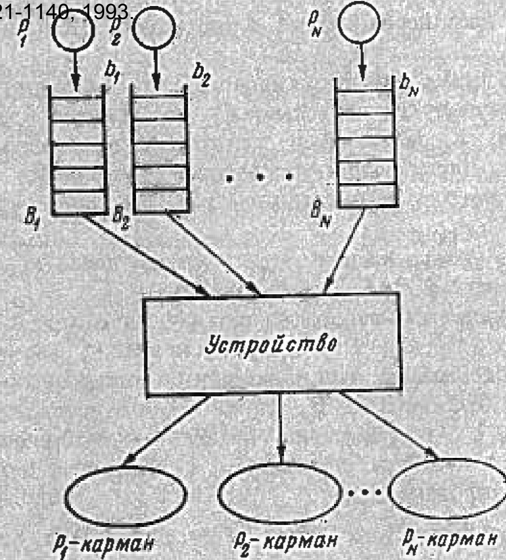

Рис. 1

такая, что для некоторого конечного $k' > 0$ и $E_{k'}$, такой, что $E_{k'}E \in E_a(x_0)$, им
место равенство $\rho(X(x_0, E_{k'}, k'), \mathfrak{X}_m) = \epsilon$. Тогда получим $V(X(x_0, E_{k'}, k')) \geqslant \lambda$. Н
силу свойства 3

$$V(X(x_0, E_k, k)) \leqslant V(x_0) < \lambda,$$

что является противоречием. Следовательно, сделанное предположение неверно и
устойчиво по Ляпунову относительно E_a. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ системы G устойч
по Ляпунову относительно E_a, то оно устойчиво по Ляпунову относительно всех
таких, что $E_{a'} \subset E_a$.

Теорема 2. Для того чтобы замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ систем
было асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно E_a, необходимо и доста
но, чтобы в некоторой достаточно малой окрестности $S(\mathfrak{X}_m; r)$ множества $\mathfrak{X}_m$ суще
вовал функционал V, обладающий свойствами 1, 2 и 3, указанными в теореме 1
кроме того, $V(X(x_0, E_k, k)) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0$
для всех $k \in \mathbf{N}$, пока выполняется условие $X(x_0, E_k, k)) \in S(\mathfrak{X}_m; r)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{X}_m \subset \mathfrak{X}$ асимптотически устойчиво отн
тельно E_a. Тогда $\mathfrak{X}_m$ устойчиво по Ляпунову относительно E_a и, следователь
некоторой достаточно малой окрестности $S(\mathfrak{X}_m; r)$ можно построить функцио
$V(x_0)$ (как в теореме 1), который удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 теоремы 1. В
лу асимптотической устойчивости множества X_m относительно E_a все движе
$X(x_0, E_k, k))$ при E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$, и при $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta)$, $\delta > 0$ остаю
в $S(\mathfrak{X}_m; r)$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Пусть $X(x_0, E_k, k))$ — одно из этих движений. Покаж
что по $\epsilon' > 0$ можно найти $T > 0$, такое, что $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \epsilon'$ для всех
таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ при $k \geqslant T$. Существование такого T следует из асимпт
ческой устойчивости. Очевидно, что

$$V(X(x_0, E_k, k)) = \sup\{\rho(X(x_0, E_{k+k'}, k+k'), \mathfrak{X}_m): \forall E_{k'},$$
$$E_{k'}E \in E_a(X(x_0, E_k, k))\ \forall k' \in \mathbf{N}\}.$$

Из того, что $\rho(X(x_0, E_{k+T}, k+T), \mathfrak{X}_m) < \epsilon'$ при $k \in \mathbf{N}$, следует, что $V(X(x_0, E_k,$
$\leqslant \epsilon'$ при $k \geqslant T$. Следовательно, $V(X(x_0, E_k, k)) \to 0$ при $k \to \infty$.

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp. 1121-1140, 1993.

Достаточность. Пусть условие теоремы 2 выполнено. Докажем, что инвариантное множество X_m асимптотически устойчиво относительно E_a. Из выполнения условий теоремы 2 следует, что в окрестности $S(\mathfrak{X}_m; r)$ существует функционал $V(x_0)$, удовлетворяющий условиям 1, 2 и 3 теоремы 1. Следовательно, множество $\mathfrak{X}_m$ устойчиво по Ляпунову относительно E_a, т.е. для любого $\epsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, такое, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$ будет $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \epsilon$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ и $k \in \mathbf{N}$. Покажем, что это δ можно, вместе с тем, выбрать, так, что будет выполнено условие $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) \to 0$ при $k \to \infty$ и при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta$. Действительно, по найденной величине $\delta > 0$ указанным в теореме 1 способом построим (как по ϵ) δ_1, такое, что при $\rho(x_0, \mathfrak{X}_m) < \delta_1$ будет $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) < \delta$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Очевидно, что $V(X(x_0, E_k, k))$ определено при $k \in \mathbf{N}$ и при всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a(x_0)$ для любой точки $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta_1)$. Покажем, что δ_1 будет искомой величиной. Предположим, что это не так, т.е. существует по крайней мере одна точка $x_0 \in S(\mathfrak{X}_m; \delta_1)$, такая, что $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathfrak{X}_m) > \gamma_1 > 0$ при $k \in \mathbf{N}$. Тогда имеем, что $V(X(x_0, E_k, k)) > \gamma_2 > 0$ в соответствии со свойством 1, что противоречит условию $V(X(x_0, E_k, k)) \to 0$ при $k \to +\infty$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если замкнутое инвариантное множество $\mathfrak{X}_m \subseteq \mathfrak{X}$ системы G асимптотически устойчиво относительно E_a, то оно асимптотически устойчиво относительно всех $E_{a'}$, таких, что $E_{a'} \subset E_a$.

4. Применение систем дискретных событий

В этом разделе показано, как проводится анализ устойчивости по Ляпунову для трех типов СДС: 1) производственной системы, которая производит обработку партий N различных типов деталей в зависимости от приоритета; 2) одной из "самостабилизирующихся" распределенных систем Дийкстры и 3) для задачи балансировки нагрузки в вычислительных сетях. В каждом случае задаются модель логической СДС (1) и инвариантное множество $\mathfrak{X}_m$, выбирается метрика ρ, выбирается функция Ляпунова $V(x)$, а затем устанавливается, что $V(x)$ удовлетворяет соответствующим свойствам. Везде проводится подробное сравнение с аналогичными приложениями в других работах.

4.1. *Производственная система.* Первый из рассматриваемых примеров – это производственная система, показанная на рис. 1, которая производит обработку партий N различных типов деталей в соответствии со схемой приоритетов. Имеется N *производителей* P_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ деталей различных типов. Производители P_i помещают партии их деталей в соответствующие *буферы* B_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Эти буферы B_i имеют *ограниченный объем* b_i, где $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Через x_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ обозначается количество деталей в буфере B_i. Через x_i для $N + 1 \leqslant i \leqslant 2N$ обозначается количество деталей P_{i-N} типа в устройстве. Устройство может обрабатывать не более M (где $M > 0$) деталей любого типа в любой момент времени. Когда устройство заканчивает обработку партий деталей P_i типа, они помещаются в соответствующие *выходные карманы* (P_i-карманы). Производители P_i могут помещать партии деталей в их буферы B_i только в случае, если $x_i < b_i$. Имеется также схема приоритетов, по которой партии деталей P_i типа могут подаваться на устройство, только если $x_j = 0$ для всех j, таких, что $1 \leqslant j < i \leqslant N$, т.е. только если отсутствуют детали во всех буферах слева от буфера B_i. Теперь определим модель СДС G для рассматриваемой производственной системы. Пусть $\mathfrak{X} = \mathbf{N}^{2N}$ и $x_k \in \mathfrak{X}$, где

$$x_k = [x_1 x_2 \ldots x_N x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{2N}]^t$$

(t означает транспортирование) обозначает состояние в момент времени k. Пусть множество событий $\mathfrak{E}$ состоит из событий e_{pi} для $1 \leqslant i \leqslant N$ (соответствующих тому случаю, когда производитель P_i помещает партию из α_{pi} деталей в буфер B_i), событий e_{ai} для $1 \leqslant i \leqslant N$ (соответствующих тому случаю, когда партия из α_{ai} деталей P_i типа подается на устройство из буфера B_i) и событий e_{di} для $N + 1 \leqslant i \leqslant 2N$ (соответствующих тому случаю, когда партия из α_{di} деталей P_{i-N}

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp.1121-1140, 1993.

тина выводится из устройства и помещается в соответствующий выходной карман
В соответствии с приведенными выше определениями функция реализации g и оп
раторы событий f_e для $e \in g(x_k)$ определяются следующим образом.

1. Если $x_i < b_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, то $e_{pi} \in g(x_k)$ и $f_{e_{pi}}(x_k) = [x_1 x_2 \ldots x_i + \alpha_{pi} \ldots x_N x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{2N}]^t$, где $\alpha_{pi} \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\alpha_{pi} \leqslant |x_i - b_i|$.

2. Если $\sum_{j=N+1}^{2N} x_j < M$ и для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N$ $x_i > 0$ и $x_l = 0$ для всех $l < i \leqslant N$, тогда $e_{ai} \in g(x_k)$ и $f_{e_{ai}}(x_k) = [x_1 x_2 \ldots x_i - \alpha_{ai} \ldots x_N x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{N+i} + \alpha_{ai} \ldots x_{2N}]^t$, где $\alpha_{ai} \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\alpha_{ai} \leqslant x_i$, и

$$\alpha_{ai} \leqslant \left| \sum_{j=N+1}^{2N} x_j - M \right|.$$

3. Если $x_i > 0$ для любого i, $N+1 \leqslant i \leqslant 2N$, то $e_{di} \in g(x_k)$ и $f_{e_{di}}(x_k) = [x_1 x \ldots x_N x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{N+i} - \alpha_{di} \ldots x_{2N}]^t$, где $\alpha_{di} \in \mathbf{N} - \{0\}$ и $\alpha_{di} \leqslant x_{N+i}$.

Предположим, что $E_v = E$, т.е. множество всех траекторий событий определяе с помощью g и f_e для $e \in g(x_k)$. Система действует в стандартном асинхронн режиме.

Эта производственная система представляет собой обобщение вычислительн систем, часто используемых при изучении простой "задачи взаимного исключен в информатике [25, 15] и аналогична нескольким приложениям, рассмотренны работах по СДС. Например, если $\alpha_{pi} = \alpha_{ai} = \alpha_{di} = 1$, то рассматриваемая произ ственная система аналогична примеру "Обработка деталей двух классов" в [28] исключением того, что в этом примере допускается наличие произвольного конечн числа деталей, вводимых в устройство, и имеется только два производителя) и при ру производственной системы в [11, 12] (где также рассматриваются только два пр водителя). Для $M = 1$, $N = 2$, $\alpha_{pi} = \alpha_{ai} = \alpha_{di} = 1$ и той же самой схемы приорите система также аналогична рассмотренной в [25] при изучении "задачи буферизац производителя/покупателя с разделенными каналами".

Пусть

$$\mathfrak{X}_{m1} = \{x_k \in \mathfrak{X} : x_i \leqslant b_i \ \forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant N \ \text{и} \ \sum_{j=N+1}^{2N} x_j \leqslant M\}. \tag{5}$$

Легко видеть, что множество $\mathfrak{X}_{m1}$ инвариантно, полагая $x_k \in \mathfrak{X}_{m1}$ и устанавли что независимо от того, какое бы ни происходило событие, следующее состояние $x_k \in \mathfrak{X}_{m1}$. Инвариантность $\mathfrak{X}_{m1}$ является тем свойством производственной сист которое широко рассматривалось в примерах аналогичных производственных си [28, 11, 12]. Более того, если $M = 1$, $N = 2$, $\alpha_{pi} = \alpha_{ai} = \alpha_{di} = 1$ и схема приори исключена, то доказательство инвариантности $\mathfrak{X}_{m1}$ эквивалентно доказател свойства взаимного исключения, часто рассматриваемому в информатике, о чем уп налось выше.

Здесь предлагается новый способ изучения свойств устойчивости введенной в производственной системы. На основании интуитивных соображений здесь будет п зано, что при определенных условиях, если производственная система начинает дв ние в небезопасном режиме работы (слишком много деталей находится в буфере в устройстве или и то и другое), то она в конечном итоге придет к условию безоп го рабочего режима. Это достаточно точно показано в следующих предложениях доказательствах.

Предложение 1. Для производственной системы замкнутое инвариантное множ $\mathfrak{X}_{m1}$ устойчиво по Ляпунову относительно E_a, где $E_a = E_v$, для любой окрест множества $\mathfrak{X}_{m1}$ (т.е. для любого $r > 0$).

Доказательство. Положим $x_k = [x_1 \ldots x_{2N}]^t$, $x_{k+1} = [x'_1 \ldots x'_{2N}]^t$, $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ldots$

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

и $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{2N}]$. Выберем

$$\rho(x_k, \mathfrak{X}_{m1}) = \inf\{ \sum_{j=1}^{2N} |x_j - \bar{x}_j| : \bar{x} \in \mathfrak{X}_{m1} \} \tag{6}$$

и $V_1(x_k) = \rho(x_k, \mathfrak{X}_{m1})$. Покажем, что $V_1(x_k)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 теоремы 1 для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m1}$. Условия 1 и 2 следуют непосредственно из выбора $V_1(x_k)$. Для условия 3 покажем, что $V_1(x_k) \geqslant V_1(x_{k+1})$ для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m1}$ независимо от того, какое происходит событие $e \in g(x_k)$, при котором $x_{k+1} = f_e(x_k)$, если только это событие находится на траектории событий в E_a.

а) Для $x_k \notin X_{m1}$, если e_{pi} имеет место для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, нужно показать, что

$$\inf\left\{ \sum_{j=1}^{2N} |x_j - \bar{x}_j| : \bar{x} \in \mathfrak{X}_{m1} \right\} \geqslant \inf \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} |x_j - \bar{x}'_j| + \right. \tag{7}$$

$$\left. + |x_i \alpha_{pi} - \bar{x}'_i| : \bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m1} \right\}.$$

Достаточно показать, что для всякого $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{m1}$, на котором достигается inf в левой части (7), существует $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m1}$, такое, что

$$\sum_{j=1}^{2N} |x_j - \bar{x}_j| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} |x_j - \bar{x}'_j| + |x_i + \alpha_{pi} - \bar{x}'_i|. \tag{8}$$

Если выбрать $\bar{x}'_l = \bar{x}_l$ для всех $l \neq i$, то достаточно показать, что для всякого $\bar{x}_i$, $0 \leqslant \bar{x}_i \leqslant b_i$, на котором достигается inf в левой части (7), существует $\bar{x}'_i$, $0 \leqslant \bar{x}'_i \leqslant b_i$, такое, что

$$|x_i - \bar{x}_i| \geqslant |x_i + \alpha_{pi} - \bar{x}'_i|, \tag{9}$$

где $\alpha_{pi} \leqslant |x_i - b_i|$. Заметим, однако, что, поскольку $0 \leqslant x_i \leqslant b_i$, хотя $0 \leqslant x_i \leqslant b_i$, inf в левой части (7) не будет достигаться в $\bar{x}_i = b_i$, таким образом, выбирая $\bar{x}'_i = \bar{x}_i + \alpha_{pi}$, придем к тому, что $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m1}$, и к выполнению (9).

б) Для $x_k \notin \mathfrak{X}_{m1}$, если e_{ai} имеет место для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, то, следуя приведенному выше подходу, достаточно показать, что для всякого $\bar{x} \in X_{m1}$, на котором достигается inf, существует $\bar{x}' \in X_{m1}$, такое, что

$$\sum_{j=1}^{2N} |x_j - \bar{x}_j| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,\, N+1}}^{2N} |x_j - \bar{x}'_j| + |x_i - \alpha_{ai} - \bar{x}'_i| + \tag{10}$$

$$+ |x_{N+i} + \alpha_{ai} - \bar{x}'_{N+i}|.$$

Выбирая $\bar{x}' = \bar{x}$, достаточно показать, что выполнены неравенства

$$|x_i - \bar{x}_i| \geqslant |x_i - \alpha_{ai} - \bar{x}_i| \tag{11}$$

$$|x_{N+i} - \bar{x}_{N+i}| \geqslant |x_{N+i} + \alpha_{ai} - \bar{x}_{N+i}|. \tag{12}$$

Для неравенства (11), если $x_i \leqslant b_i$, inf достигается таким образом, что $|x_i - x_i| = |x_i - \alpha_{ai} - \bar{x}_i| = 0$, тогда как, если $x_i > b_i$, то inf достигается при $\bar{x}_i = b_i$, поэтому нужно показать, что будет $|x_i - b_i| \geqslant |x_i - \alpha_{pi} - b_i|$ для всех $x_i > b_i$ и $\alpha_{pi} \leqslant |x_i - b_i|$, что в достаточной степени очевидно. Случай неравенства (12) аналогичен случаю а) выше. Случай для событий e_{di} аналогичен случаю неравенства (11). Что и требовалось доказать.

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

Предложение 2. Для производственной системы замкнутое инвариантное множес X_{m1} не является асимптотически устойчивым в целом относительно E_a, где E_a =

Доказательство. Покажем, что для некоторого $x_0 \notin \mathfrak{X}_{m1}$ существует E_k, где E_kE $\in E_a$, такое, что условие $V_1(X(x_0, E_k, k)) \to 0$ при $k \to +\infty$ не выполняется. Рассмотр случай, когда $x_i > b_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$ (но когда устройство находится в з безопасной работы) и $E_kE = e_{a1}, e_{a1}, \ldots, e_{a1}, e_{p1}, e_{a1}, e_{d1}, e_{p1}, e_{a1}, e_{d1}, \ldots$ Эта доп тимая траектория событий соответствует тому случаю, когда детали P_1 типа вводя в устройство для обработки (и, возможно, обрабатываются и выводятся) до тех п пока B_1 находится в зоне безопасной работы $(x_1 < b_1)$, затем в каждый момент, к да деталь производится производителем P_1 и помещается в B_1, она помещаетс устройство из B_1, и устройство обрабатывает ее и выводит, P_1 помещает другую дет в B_1, и процесс повторяется. Для этого $E_kE \in E_a$ при всех $k \in \mathbf{N}$ существует $k' \geqslant$ для которого будет $X(x_0, E_{k'}, k') \notin \mathfrak{X}_{m1}$. В силу условия 1 теоремы 1 в этом слу свойство $V_1(x_k) \to 0$ не выполняется для выбранной последовательности $E_kE \in E_a$ (x Что и требовалось доказать.

Через $E_a' \in E_a$ обозначим множество траекторий событий, таких, что каждое собы $e \in \mathfrak{E}$ возникает бесконечно часто на каждой траектории событий $E \in E_a'$. Если предп жить для производственной системы, что происходят только такие события, котор расположены на траекториях в E_a', то в этом случае в конце концов всегда будут пр ходить события каждого типа $(e_{pi}, e_{ai}, 1 \leqslant i \leqslant N$ и $e_{di}, N+1 \leqslant i \leqslant 2N)$.

Предложение 3. Для производственной системы замкнутое инвариантное множес X_{m1} асимптотически устойчиво в целом относительно E_a'.

Доказательство. Согласно следствию 1 и предложению 1 $\mathfrak{X}_{m1}$ устойчиво по Ляпун относительно E_a'. Чтобы доказать асимптотическую устойчивость, покажем, $V_1(x_k) \to 0$ при $k \to +\infty$ для всех E_k, таких, что $E_kE \in E_a'(x_0)$, и для всех $x_k \notin \mathfrak{X}$ С этой целью только лишь объясним, каким образом при $x_k \notin \mathfrak{X}_{m1}$ существует k' такое, что $x_{k'} \in \mathfrak{X}_{m1}$. Используя тот факт, что каждое событие должно происход бесконечно часто, e_{ai} для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant N$ будет происходить достаточно ча чтобы поставить буферы B_i в режим безопасной работы, и e_{di} для каждого i, $N+$ $\leqslant i \leqslant 2N$ будет происходить достаточно часто, чтобы обеспечить режим безопас работы устройства (производители получат более справедливое использование уст ства, что будет исключать появление траекторий событий типа тех, которые использ лись в доказательстве предложения 2). Отсюда ясно, что если производственная си ма начинает работать в небезопасном режиме, то она в результате перейдет в ре безопасной работы. Что и требовалось доказать.

Использование множества E_a' для производственной системы приводит к тому, называется ограничением "справедливости" в информатике (в рассматриваемом мере требуется, чтобы каждый производитель был в условиях справедливого испол вания устройства) [8]. Такие ограничения используются в работах по временной л ке [5, 15], в задаче взаимного исключения в информатике и в работе [29], в кото изучаются условия, при которых для класса логических СДС может быть п роена функция Ляпунова.

4.2. *Самостабилизирующаяся распределенная система Дийкстры.* В [7] Дийк предложил три системы в качестве кандидатов на "самостабилизируемость", но не д зал это свойство. Используя метод линейной временной логики (система док тельств из здравого смысла), Тистл и Вонхам [28] показали, что с незначительн изменениями первая из систем Дийкстры действительно является самостабилизи щейся. Вторая система Дийкстры изучалась при помощи метода временной логи ветвлением времени в [22]. В настоящей работе используется метод из раздела 3 изучения свойств устойчивости инвариантного множества, указанного Тистлом и хамом для первой системы Дийкстры.

Распределенная система, предложенная Дийкстрой, представляет собой сет $N+1$ устройств, собранных в "кольцо". Устройство n обозначается через m_n, пр каждое m_n имеет в качестве соседних устройств $m_{(n-1)\bmod(N+1)}$ и $m_{(n+1)\bmod(N}$

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

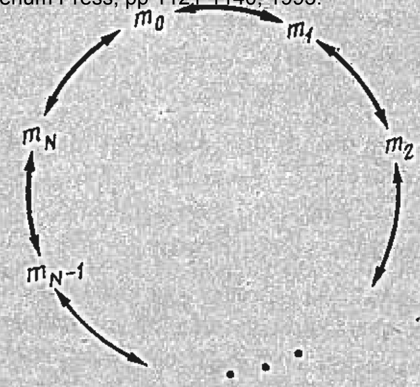

Рис. 2

Эта распределенная система показана на рис. 2. Состояние устройства m_n представляется как $x_n \in \mathbf{N}$, где $x_n < K$ для некоторого K, $K \geqslant N$. Требуется определить, когда может быть осуществлена связь в кольце и что будет передаваться от устройства к устройству. Это может быть сделано определением модели G для распределенной системы.

Пусть $\mathfrak{X} = \{ x \in \mathbf{N}^{N+1} : x = [x_0 x_1 \ldots x_N]^t$, каждое $x_i < K$, где $K \geqslant N \}$ – множество состояний. Множество событий задается с помощью $\mathfrak{E} = \{ e_i : 0 \leqslant i \leqslant N\}$, а появление e_i будет указывать на то, что имеет место связь между устройствами. Далее определим g и f_e для всех $e \in g(x)$. Положим $x_k = [x_0 x_1 \ldots x_N]^t$ и $x_{k+1} = [x'_0 x'_1 \ldots x'_N]^t$, и пусть "$x := y$" обозначает, что x присвоено значение y, тогда:

1) если $x_N = x_0$, то $e_0 \in g(x_k)$ и $f_{e_0}(x_k) = x_{k+1}$, где для i, $1 \leqslant i \leqslant N$ $x'_i := x_i$ и $x'_0 := (x_0 + 1) \bmod K$, и

2) если $x_i \neq x_{i-1}$ для любого i, $0 \leqslant i \leqslant N$, то $e_i \in g(x_k)$ и $f_{e_i}(x_k) = x_{k+1}$, где $x'_i := x_{i-1}$ и $x'_j := x_j$ для всех $j \neq i$.

Незначительным изменением примера Дийкстры Тистл и Вонхам получили следующее инвариантное множество $\mathfrak{X}_{m2}$:

$$\mathrm{X}_{m2} = \{ x_k \in \mathfrak{X} : \; x_i = x_0 \;\; \forall i, \; 0 \leqslant i \leqslant N \text{ или, если } \exists n, \; 0 \leqslant n \leqslant N,$$
$$x_i = x_0 \; \forall i, \; 0 \leqslant i \leqslant n \text{ и } x_j = (x_0 - 1) \bmod K, \; \forall j, \; n < j \leqslant N \}$$

и объяснили, почему это множество является инвариантным. Выберем $\mathrm{E}_\nu = \mathrm{E}$ и заметим, что каждое событие $e_i \in \mathfrak{E}$ будет возникать бесконечно часто на каждой траектории событий в E_ν (так как для того, чтобы ни одно событие не было реализовано, должно быть $x_0 \neq x_N$ и $x_i = x_{i-1}$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant N$, что никогда не может быть выполнено).

Следующее предложение и его доказательство обеспечивают более удобную характеристику и анализ свойств устойчивости первой системы Дийкстры, чем в [28].

Предложение 4. Для распределенной системы Дийкстры замкнутое инвариантное множество X_{m2} является асимптотически устойчивым в целом относительно E_a, где $\mathrm{E}_a = \mathrm{E}_\nu$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_N]^t$, $\bar{x}' = [\bar{x}'_1 \ldots \bar{x}'_N]^t$,

$$\rho(x_k, \mathfrak{X}_{m2}) = \inf \{ \max \{ |x_0 - \bar{x}_0|, \; |x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N| \} : x \in \mathfrak{X}_{m2} \}, \tag{13}$$

$V_2(x_k) = \rho(x_k, \mathfrak{X}_{m2})$. Этот выбор обеспечивает выполнение условий 1 и 2 теоремы 1. Для условия 3 теоремы 1 покажем, что для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m2}$ и всех $e \in g(x_k)$, когда e происходит и $x_{k+1} = f_e(x_k)$, получим $V_2(x_k) \geqslant V_2(x_{k+1})$. Заметим, что $V_2(x_k) \leqslant (K-1)/2$ для всех $x_k \notin \mathfrak{X}$, так как $x_i \leqslant K - 1$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant N$.

а) Для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m2}$, если $e_0 \in g(x_k)$ и e_0 происходит, то в момент времени

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

k $x_0 = x_N$ и нужно показать, что

$$\inf\{\max\{|x_0 - \bar{x}_0|, |x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N|\}: x \in \mathfrak{X}_{m2}\} \geqslant$$
$$\geqslant \inf\{\max\{|(x_0 + 1) \bmod K - x_0'|, |x_1 - \bar{x}_1'|, \ldots, |x_N - x_N'|\}: \bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}\}. \tag{14}$$

Достаточно показать, что для любого $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{m2}$, на котором достигается inf в лево[й] части неравенства (14), существует $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}$, такое, что

$$\max\{|x_0 - \bar{x}_0|, |x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N|\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\{|(x_0 + 1) \bmod K - \bar{x}_0'|, |x_1 - \bar{x}_1'|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N'|\}. \tag{15}$$

Если $\bar{x}_i = x_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant N$, тогда при выборе величины $\bar{x}'_0 = (\bar{x}_0 + 1) \bmod$ [...] и $\bar{x}_j' = \bar{x}_0$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant N$ неравенство (15) выполняется и $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}$. Если i[...] в левой части (14) достигается при $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{m2}$, так что $\bar{x}_i = \bar{x}_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$ [...] $x_j = (\bar{x}_0 - 1) \bmod K$ для всех j, $n < j \leqslant N$, то нужно показать, что существует $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}$ [...] такое, что выполнено условие (15). Отметим, что для этого конкретного вектора [...] либо $|x_0 - \bar{x}_0| \geqslant 1$, либо $|x_N - (\bar{x}_0 - 1) \bmod K| \geqslant 1$, поскольку $x_0 = x_N$.

1) Рассмотрим случай, когда $|x_0 - \bar{x}_0| \geqslant 1$. Если $0 \leqslant x_0 < \bar{x}_0 < K$, то выбор $\bar{x}' =$ [...] приводит к выполнению (15), так как $|x_0 - \bar{x}_0| \geqslant |(x_0 + 1) \bmod K - \bar{x}_0|$. Ес[ли] $0 \leqslant \bar{x}_0 < x_0 < K$ и $\bar{x}_0 = 0$, тогда будет $(\bar{x}_0 - 1) \bmod K = K - 1$ и нужно показать, ч[то]

$$\max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, |x_{n+1} - (K-1)|, \ldots, |x_N - (K-1)|\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\{(x_0 + 1) \bmod K, x_1, \ldots, x_n, |x_{n+1} - (K-1)|, \ldots, |x_N - (K-1)|\}, \tag{16}$$

если выбрать $\bar{x}' = \bar{x}$. Если $x_0 = K - 1$, то (16) выполняется, поскольку $(x_0+1) \bmod K =$ [...] Покажем далее, что (16) также выполняется для всех x_0, $1 \leqslant x_0 < K - 1$. Если x_0 [...] $< |x_N - (K-1)|$, то $x_0 + 1 \leqslant |x_N - (K-1)|$ и (16) выполняется. Если x_0 [...] $\geqslant |x_N - (K-1)|$, то $x_0 \geqslant (K-1)/2$ и $|x_0 - \bar{x}_0| \geqslant (K-1)/2$. Но максимум в лев[ой] части (16) ограничен величиной $(K-1)/2$, поэтому единственной возможностью явл[я]ется равенство $|x_0 - \bar{x}_0| = (K-1)/2$, откуда следует, что максимум в правой час[ти] (16) должен достигаться таким образом, чтобы выполнялось неравенство (16). Ес[ли] $0 \leqslant \bar{x}_0 < x_0 < K$, $|x_N - (\bar{x}_0 - 1) \bmod K| > |x_0 - \bar{x}_0|$ и $|(x_0 + 1) \bmod K - x_0$ [...] $\leqslant |x_N - (\bar{x}_0 - 1) \bmod K|$, поэтому для $\bar{x}' = \bar{x}$ (15) выполнено.

2) Рассмотрим случаи, когда $|x_N - (\bar{x}_0 - 1) \bmod K| \geqslant 1$. Если $x_N < (\bar{x}_0 - 1) \bmod$ [...] то доказательство проводится так же, как и в первой части 1) выше. Если x_N [...] $> (\bar{x}_0 - 1) \bmod K$, то выберем $\bar{x}' = \bar{x}$, тогда возможно, что $x_0 = x_0$; в этом слу[чае] $|x_N - (\bar{x}_0 - 1) \bmod K| = 1$ и $|(x_0 + 1) \bmod K - \bar{x}_0| = 1$ и, следовательно, выполняе[тся] (15). Случай $x_0 \neq \bar{x}_0$ аналогичен случаю 1), приведенному выше, что и завершает до[ка]зательство для e_0.

б) Для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m2}$, если $e_i \in g(x_k)$ и e_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ имеют место, то в мом[ент] времени k $x_i \neq x_{i-1}$, а в момент времени $k+1$ $x_i' = x_{i-1}$. Используя метод пун[кта] а) выше, достаточно показать, что для всякого $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{m2}$, при котором достигае[тся] inf, существует $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}$, такое, что

$$\max\{|x_0 - \bar{x}_0|, |x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - x_N|\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\{|x_0 - \bar{x}_0'|, \ldots, |x_{i-1} - \bar{x}_{i-1}'|, |x_{i-1} - \bar{x}_i'|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N'|\}, \tag{17}$$

что очевидным образом выполняется, если $\bar{x}_i = \bar{x}_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant N$, и при вы[боре] $\bar{x}' = \bar{x}$. Если $\bar{x}_i = x_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\bar{x}_j = (\bar{x}_0 - 1) \bmod K$ для всех j, $n < j$ [...] то нужно показать, что существует такое $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m2}$, для которого выполняется ([...] Если $i \neq n+1$, то выбор $x' = \bar{x}$ приводит к выполнению (17). Если $i = n+1$, то вы[бор] $\bar{x}_i' = \bar{x}_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ и $\bar{x}_j' = (\bar{x}_0 - 1) \bmod K$ для всех j, $n+1 < j \leqslant N$ та[кже] приводит к выполнению (17). Это завершает доказательство того, что $\mathfrak{X}_{m2}$ устой[чиво] по Ляпунову относительно E_a для всех окрестностей множества $\mathfrak{X}_{m2}$.

Теперь необходимо показать, что $\mathfrak{X}_{m2}$ асимптотически устойчиво в целом отн[...]

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation and Remote C ontrol), No 8, pp. 8-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

тельно E_a. Заметим, что если $x_k \notin \mathfrak{X}_{m2}$, то будем иметь $X(x_0, \mathrm{E}_{k'}, k') \neq x_k$ для $k' > k$ и всех $\mathrm{E}_{k''}$ таких, что $\mathrm{E}_{k'}\mathrm{E} \in \mathrm{E}_a(x_k)$. Таким образом, состояние системы никогда не возвратится в предыдущее состояние, пока система находится вне инвариантного множества. Следовательно, невозможно, чтобы существовало $k \in \mathbf{N}$, такое, что для всех $k' \geqslant k$ $V_2(x_{k'}) = V_2(x_{k'+1}) > 0$ для любого $\mathrm{E}_{k'}$, такого, что $\mathrm{E}_{k'}\mathrm{E} \in \mathrm{E}_a(x_0)$, так что в конце концов $V_2(x_k)$ должно убывать, а это гарантирует асимптотическую устойчивость в целом множества X_{m2} относительно E_a. Что и требовалось доказать.

4.3. *Задача балансировки загрузки в вычислительной сети.* Рассмотрим вычислительную сеть, описываемую ненаправленным графом (C, A), где $C = \{1, 2, \ldots, N\}$ представляет совокупность компьютеров, которые нумеруются индексом $i \in C$, а $A \subset C \times C$ – множество связей между компьютерами. Требуется, чтобы для $i \in C$ существовала пара $(i, j) \in A$ (или $(j, i) \in A$) с некоторым $j \in C$ (т.е. чтобы каждый компьютер был соединен с сетью). Предполагается также, что если $(i, j) \in A$, то и $(j, i) \in A$. Каждый компьютер имеет буфер, в котором накапливаются задания (загрузка), каждое из которых может быть выполнено любым компьютером в сети. Пусть загрузка компьютера $i \in C$ задается величиной x_i; $x_i \geqslant 0$. Каждое соединение в сети $(i, j) \in A$ позволяет компьютеру i передать часть своей нагрузки компьютеру j и наоборот. Оно также позволяет компьютерам i и j оценить размер загрузки каждого из них (любые два компьютера i и j, такие, что $(i, j) \notin A$, не могут передавать части своих загрузок или оценивать объем загрузки один другого).

Допустим, что первоначально распределение загрузки между компьютерами неравномерно, и будем искать способы достижения более равномерного распределения заданий, чтобы компьютеры в сети использовались наиболее полно. Для удобства допустим, что компьютеры не начнут обработку некоторого задания и не получат еще одного для обработки до тех пор, пока загрузка не будет сбалансирована (это предположение легко снимается и предложенный анализ также можно применять, что будет показано ниже в замечании 4). Далее определим модель G для задачи балансировки загрузки в вычислительных сетях.

Пусть $\mathrm{X} = \mathbf{N}^N$ обозначает множество состояний, а

$$x_k = [x_1 x_2 \ldots x_N]^t \quad \text{и} \quad x_{k+1} = [x_1' \, x_2' \ldots x_N']^t$$

обозначают состояния в моменты времени k и $k+1$ соответственно. Пусть $\mathfrak{E} = \{e_\alpha^{ij}: (i, j) \in A, \alpha \in \mathbf{N} - \{0\}\} \cup \{e_0\}$ – множество событий для G, где e_α^{ij} представляет собой случай, когда количество α загрузки компьютера i передается компьютеру j, а e_0 представляет нулевое событие (т.е. случай, когда никакая загрузка не передается). Пусть $M \in \mathbf{N} - \{0\}$ – количество несбалансированной загрузки, допустимой между любыми двумя компьютерами i и j, где $(i, j) \in A$. (Случай, когда $M = 0$, рассматривается ниже в замечании 5.) Определим далее g и f_e для $e \in g(x_k)$.

1. Если для любых $(i, j) \in A$, $|x_i - x_j| > M$, то

а) если $x_i > x_j$, то $e_\alpha^{ij} \in g(x_k)$ и $f_e(x_k) = x_{k+1}$, где $e = e_\alpha^{ij}$, $x_i' := x_i - \alpha$, $x_j' := x_j + \alpha$, $x_k' := x_k$ для всех $k \neq i, j$ и $0 < \alpha \leqslant (1/2)\,|x_i - x_j|$ для $\alpha \in \mathbf{N}$;

б) если $x_j > x_i$, то $e_\alpha^{ij} \in g(x_k)$ и $f_e(x_k) = x_{k+1}$, где $e = e_\alpha^{ij}$, $x_j' := x_j - \alpha$, $x_i' := x_i + \alpha$, $x_k' := x_k$ для всех $k \neq i, j$ и $0 < \alpha \leqslant (1/2)\,|x_i - x_j|$ для $\alpha \in \mathbf{N}$.

2) Если $|x_i - x_j| \leqslant M$ для всех $(i, j) \in A$, то $e_0 \in g(x_k)$ и $f_{e_0}(x_k) = x_k$.

Пусть $\mathrm{E}_v = \mathrm{E}$ и $\mathfrak{X}_{m3} = \{x \in \mathfrak{X} : |x_i - x_j| \leqslant M$ для всех $(i, j) \in A\}$ – множество, которое с очевидностью является инвариантным.

Эта задача балансировки загрузки аналогична задаче, рассмотренной в [1], за исключением того, что в этой работе требуется, чтобы загрузка компьютеров была представлена непрерывной переменной. Там же производится поиск полного баланса заданий, компьютеру разрешается одновременно передавать загрузку нескольких соседних компьютеров и допускается возможность, чтобы информация о загрузке смежных компьютеров устаревала. Там же требуется, чтобы система была "частично асинхронной", так что можно достичь балансировки загрузки, когда компьютеры имеют

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

возможно только устаревшую информацию о загрузке соседей. Различные виды зад балансировки загрузки рассматривались также в работах по СДС [2] и широко изу лись в информатике (см. работы [1, 2, 6] и ссылки в них).

Следующее предложение представляет новую характеристику и анализ устойчиво по Ляпунову задачи балансировки загрузки в вычислительной сети, рассмотренной вы

Предложение 5. Для задачи балансировки загрузки в вычислительной сети замк тое инвариантное множество $\mathfrak{X}_{m3}$ асимптотически устойчиво в целом относительно где $E_a = E_v$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_N]^t$, $\bar{x}' = [\bar{x}'_1 \ldots \bar{x}'_N]^t$ и выберем

$$\rho(x_k, \mathfrak{X}_{m3}) = \inf\{\max\{|x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N|\} : \bar{x} \in \mathfrak{X}_{m3}\} \tag{18}$$

и $V_3(x_k) = \rho(x_k, \mathfrak{X}_{m3})$ так, что будут выполнены условия 1 и 2 теоремы 1. Для ус вия 3 теоремы 1 нужно показать, что для всех $x_k \notin \mathfrak{X}_{m3}$ и всех $e_\alpha^{ij} \in g(x_k)$, ко возникает событие e_α^{ij}, будет $V_3(x_k) \geqslant V_3(x_{k+1})$ (случай для e_α^{ji} аналогичен, а слу e_0 не может иметь места, если не выполнено $x_k \in \mathfrak{X}_{m3}$), т.е. что

$$\begin{aligned}
&\inf\{\max\{|x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N| : \bar{x} \in \mathfrak{X}_{m3}\} \geqslant \\
&\geqslant \{\inf \max\{|x_1 - \bar{x}'_1|, \ldots, |x_i - \alpha - \bar{x}'_i|, \ldots, |x_j + \alpha - \bar{x}'_j|, \ldots \\
&\ldots, |x_N - \bar{x}'_N| : \bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m3}\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Для этого покажем, что для всякого $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{m3}$, при котором достигается inf в лев части (19), существует $\bar{x}' \in \mathfrak{X}_{m3}$, такое, что

$$\begin{aligned}
&\max\{|x_1 - \bar{x}_1|, \ldots, |x_N - \bar{x}_N|\} \geqslant \\
&\geqslant \{\max\ |x_1 - \bar{x}'_1|, \ldots, |x_i - \alpha - \bar{x}'_i|, \ldots, |x_j + \alpha - \bar{x}'_j|, \ldots, |x_N - \bar{x}'_N|\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Выберем $\bar{x}'_l = \bar{x}_l$ для всех $l \neq i, j$, тогда для данных $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$, при которых до гается inf в левой части (19), достаточно показать, что для точек $\bar{x}'_i$ и $\bar{x}'_j$, в котор достигается inf в правой части (19), будем иметь

$$\max\{|x_i - \bar{x}_i|, |x_j - \bar{x}_j|\} > \max\{|x_i - \alpha - \bar{x}'_i|, |x_j + \alpha - \bar{x}'_j|\}. \tag{21}$$

Пусть $x^*, x_* \in \mathbf{N} - \{0\}$ и $x^* > x_* \geqslant 0$, где $x^* - x_* = M$. Справедливость (21) устан ливается рассмотрением значений x_i и x_j, таких, что $x_i > x_j$.

1. Пусть $x_i - \alpha > x^*$ и $x_j \geqslant x_* - \alpha$. Следовательно, $\bar{x}'_i = \bar{x}_i = x^*$ и

а) $|x_i - \bar{x}_i| > |x_i - \alpha - \bar{x}_i|$,

б) если $x_j \geqslant x^*$, $\bar{x}'_j = \bar{x}_j = x^*$, и так как $x_i > x_j$, $|x_i - \bar{x}_i| > |x_j - \bar{x}_j|$; если $\in [x_*, x^*]$, $\bar{x}_j = x_j$, поэтому $|x_i - \bar{x}_i| > |x_j - \bar{x}_j| = 0$; если $x_* - \alpha \leqslant x_j < x_*$, $\bar{x}'_j =$ $= x^*$, $|x_i - \bar{x}_i| > \alpha$ и $|x_j - \bar{x}_j| \leqslant \alpha$, поэтому $|x_i - \bar{x}_i| > |x_j - x_j|$,

в) так как $2\alpha \leqslant |x_i - x_j|$ и $x_i > x_j$, $x_i - \alpha \geqslant x_j + \alpha$; если $x_j + \alpha \geqslant x^*$, $\bar{x}'_j =$ $= x^*$, поэтому $|x_i - \alpha - \bar{x}'_i| \geqslant |x_j + \alpha - \bar{x}'_j|$; если $x_j + \alpha \in [x_*, x^*]$, то $\bar{x}'_j = x_j +$ $|x_i - \alpha - \bar{x}'_i| \geqslant |x_j + \alpha - \bar{x}'_j| = 0$.

2. Пусть $x_i - \alpha > x^*$ и $x_j < x_* - \alpha$; следовательно, $\bar{x}'_i = \bar{x}_i = x^*$ и $\bar{x}'_j = \bar{x}_j =$

а) $|x_i - \bar{x}_i| > |x_i - \alpha - \bar{x}_i|$ и

б) $|x_j - \bar{x}_j| > |x_j + \alpha - \bar{x}_j|$.

Это показывает, что для всех x_i, таких, что $x_i - \alpha > x^*$, и всех x_j, таких, что $x_i >$ выполняется (21). Доказательство продолжается аналогичным образом рассмо нием всех x_i и x_j, таких, что $x_i > x_j$. Это завершает доказательство того, что устойчиво по Ляпунову относительно E_a для всех окрестностей множества $\mathfrak{X}_{m3}$.

Далее нужно показать, что $\mathfrak{X}_{m3}$ асимптотически устойчиво в целом относительно Заметим, что из доказательства неравенства (21) следует, что каждый раз, к происходит событие e_α^{ij}, будет $|x_m - \bar{x}_m| > |x'_m - \bar{x}'_m|$, где $m = i$ или $m = j$ (и обоих случаях), и для $l \neq m$ $|x_l - \bar{x}_l| > |x'_l - \bar{x}'_l|$. Следовательно, каждый раз, к

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp. 1121-1140, 1993.

происходит событие e_α^{ij}, происходит определенный прогресс в балансировке загрузки. Так как N и $|A|$ являются конечными, а некоторое событие e_α^{ij} будет возможным и будет происходить, пока $x_k \in \mathfrak{X}_{m3}$, то в этом случае всегда существует k, такое, что для некоторого $k' \geqslant k$ $V_3(x_{k'}) > V_3(x_{k'+1})$, пока $x_k \neq \mathfrak{X}_{m3}$, так что $V_3(x_{k'}) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех E_k, таких, что $E_k E \in E_a$. Что и требовалось доказать.

Замечание 4. Если задания загружены в вычислительную сеть или обрабатываются одним из компьютеров $i \in C$, то полагаем, что есть новое начальное состояние x_0, которое отражает увеличенную или уменьшенную загрузку, а приведенный выше анализ устойчивости показывает, что загрузка будет в конце концов все же сбалансирована (эта особенность обсуждалась также в [1]). Фактически, если общее количество загрузки конечно, то требуется конечное время для сбалансирования этой загрузки.

Замечание 5. Предположим, что допускается значение $M = 0$. Область асимптотической устойчивости следующего инвариантного множества $\mathfrak{X}'_{m3} = \{x_k : x_i = x_j$ для всех $(i, j) \in A\}$ задается в виде

$$\mathfrak{X}_a = \{x_k : (\sum_{i=1}^{N} x_i) \bmod M = 0\}.$$

Таким образом, область асимптотической устойчивости задается множеством всех начальных состояний, таких, что общая загрузка может быть равномерно распределена между N компьютерами $i \in C$.

5. Заключение

Показано, что можно определить и изучить устойчивость по Ляпунову широкого класса логических СДС (например, СДС, которые моделируются при помощи расширенных сетей Петри, конечных автоматов и т.д.), используя идеи теории устойчивости в метрических пространствах [30]. Следовательно, на логические СДС, которым в последнее время уделяется большое внимание в литературе, распространяется общепринятый метод анализа устойчивости, связанный с выбором соответствующих функций Ляпунова. Другие понятия устойчивости и разработанные в последние годы приемы анализа устойчивости, основанные на методах теоретической информатики (обзор которых приведен во введении), часто оказываются неработоспособными из-за их вычислительной сложности. В настоящей работе оказалось возможным полностью избежать проблем, связанных с вычислительной сложностью, и свести задачу к определению функций Ляпунова, удовлетворяющих определенным свойствам. В качестве иллюстрации было показано, что такие функции Ляпунова несложно построить для трех типов СДС: для производственной системы, которая обрабатывает партии N различных типов деталей в соответствии со схемой приоритетов, для одной из самостабилизирующихся распределенных систем Дийкстры и для задачи балансировки загрузки в вычислительных сетях.

Предложенный в работе подход к анализу устойчивости СДС в традиционной терминологии теории устойчивости позволит в будущем исследователям использовать различные концепции теории устойчивости по Ляпунову для изучения свойств СДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.* Parallel and distributed computation: Numerical methods. N.J.: Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, 1989.
2. *Boel R.K., Van Schuppen J.H.* Distributed routing for load balancing // Proc. IEEE. 1989. V. 77. № 1. P. 210–221.
3. *Brave Y., Heymann M.* On stabilization of discrete event processes // Proc. 28th Conf. Dec. Control, Tampa, FL, Dec. 1989. P. 2737–2742.
4. *Buchi J.R.* On a decision method in restricted second order arithmetic // Proc. Int. Congress Logic, Mathematics, and Phil. Sci., 1960. Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1962. P. 1–11.
5. *Clarke E.M., Browne M.C., Emerson E.A., Sistla A.P.* Using temporal logic for automatic verification of finite state systems // Logics and Models of Concurrent Systems. N.Y.: Springer-Verlag, 1985. P. 3–25.

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.

6. Cybenko G. Dynamic load balancing for distributed memory multiprocessors // Dept. of Comp Science Technical Report 87–1, Tufts Univ., Medford MA, 1987.
7. Dijkstra E.W. Self-stabilizing systems in spite of distributed control // Comm. of the ACM. 1974. V № 11. P. 643–644.
8. Francez M. Fairness. N.Y.: Springer-Verlag, 1986.
9. Fusaoka A., Seki H., Takahashi K. A description and reasoning of plant controllers in temporal lo Proc. of the 8th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence, August 1983. P. 405–408.
10. Hahn W. Stability of motion. N.Y.: Springer-Verlag, 1967.
11. Knight J.F., Passino K.M. Decidability for temporal logic in control theory // Proc. of the Allerton on Communication, Control and Computing, Univ. of Illinois, Urbana – Champaign, Oct. 1987. P. 344.
12. Knight J.F., Passino K.M. Decidability for a temporal logical used in discrete event system analy The Int. Journal of Control, 1990.
13. Krogh B.H. Controlled Petri nets and maximally permissive feedback logic // Proc. of the 25th All Conf., Univ. of Illinois at Urbana – Champaign, Sept. 1987. P. 317–326.
14. Kumar P.R., Seidman T.I. Dynamic instabilities and stabilization methods in distributed real-time sc ling of manufacturing systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. AC-35. № 3. P. 289–
15. Manna Z., Pnueli A. Verification of concurrent programs: a temporal proof system // Dept. of Co ter Science, Stanford Univ., Report No. STAN-CS-83-967, 1983.
16. Michel A.N., Miller R.K. Qulitative analysis of large scale dynamical systems. N.Y.: Academic 1977.
17. Muller D.E. Infinite sequences and finite machines // Switching Circuit Theory and Logic Design, Fourth Annual Symp., IEEE, Chicago, IL, 1963. P. 3–16.
18. Ostroff J.S. Real-time computer control of discrete systems modelled by extended state machi temporal logic approach, PhD Dissertation, Report No. 8618, Dept. of Elect. Eng., Univ. of Tor Jan. 1987.
19. Ozveren C.M. Analysis and control of discrete event dynamic systems: a state space approach, Dissertation, MIT, LIDS Report LIDS-TH-1907, Aug. 1989.
20. Ozveren C.M., Willsky A.S., Antsaklis P.J. Stability and stabilizability of descrete event dynamic sy // MIT, LIDS Report LIDS-P-1853, Febr. 1989.
21. Passino K.M. The input/output Petri net for discrete event system modelling // Control Systems T cal Note # 69, Dept. of Electrical Eng., Univ. of Notre Dame, June 1989.
22. Passino K.M., Antsaklis P.J. Branching time temporal logic for discrete event system analysis // of the 26th Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, Univ. of Illinois at Urb Champaign, Sept. 1988. P. 1160–1169.
23. Passino K.M., Michel A.N., Antsaklis P.J. Stability analysis of descrete event systems // Proc. 28th ton Conf. on Communication, Control and Computing, Univ. of Illinois at Urbana – Champaig 3–5, 1990. P. 487–496.
24. Perkins J.R., Kumar P.R. Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing / asse disassembly systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. № 2. P. 139–148.
25. Peterson J.L. Petri net theory and modelling of systems. N.J.: Prentice Hall, 1981.
26. Ramadge P.J. Some tractable supervisory control problems for discrete-event systems modelled by automata // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. № 1. P. 10–19.
27. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory control of a class of discrete event processes // SIAM J. rol and Optimization. 1987. V. 25. № 1. P. 206–230.
28. Thistle J.G., Wonham W.M. Control problems in a temporal logic framework // Int. J. Control. V. 44. № 4. P. 943–976.
29. Tsitsiklis J.N. On the stability of asychronous iterative processes // Mathematical Systems T 1987. V. 20. P. 137–153.
30. Zubov V.I. Methods of A.M. Lyapunov and their application. P. Noordhoff Ltd., The Nethe 1964.

Поступила в редакцию 29.03.91

K. M. Passino, A. N. Michel and P. J. Antsaklis, "Ustojchivost' po Ljapunovu klassa sistem diskretnyx sobytij" ("Lyapunov Stability of Discrete Event Systems"), A vtomatika i T elemekhanika (J ournal o f A utomation a nd R emote C ontrol) , No.8, pp. 3-18, August 1992. In Russian.
English translation published by Plenum Press, pp 1121-1140, 1993.