ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 418, № 3, с. 1–5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958 530.145 512.662.5 515.143.5

О СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ *BF*-ТЕОРИИ

 П. Н. Мнёв

Представлено академиком Л. Д. Фаддеевым 11.08.2007 г.

Поступило 14.08.2007 г.

ВВЕДЕНИЕ

В данном сообщении содержится краткий пересказ конструкций и результатов, изложенных в электронном препринте [4], полученных автором в рамках работы над симплициальной программой для топологических квантовых теорий поля. Идея симплициальной программы – эквивалентная замена теории поля на многообразии M в лагранжевом формализме на дискретизованную (симплициальную) теорию, связанную с триангуляцией T многообразия M, с конечномерным пространством полей. Эквивалентная замена означает, что нужно определить пространство полей, действие и наблюдаемые симлициальной версии теории, так что корреляторы в ней совпадают с корреляторами исходной теории на многообразии. Такая замена позволила бы вычислять статсумму и корреляторы квантовой теории поля не через функциональный интеграл, а через конечнократные интегралы, избегая тем самым проблемы расходимостей и перенормировок. В данном случае мы занимаемся неабелевой BF-теорией с классическим действием $S = \mathrm{tr}\int_M B \wedge (dA + A \wedge A)$, где поле A – связность в тривиальном главном G-расслоении на M (G – калибровочная группа) и B – дифференциальная форма на M степени $\dim M - 2$ со значениями в $\mathfrak{g}$ (алгебре Ли группы G). Кроме того, мы здесь не обсуждаем наблюдаемые.

Схема работы такова: BF-теория, записанная в формализме Баталина–Вилковыского (БВ) (что означает в данном случае замену полей A и B на неоднородные дифференциальные формы), интерпретируется как частный случай “абстрактной” BF-теории, соответствующей дифференциальной градуированной алгебре Ли $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на многообразии M (здесь используются идеи из [1]). Далее для абстрактной BF-теории определяется процедура перехода к эффективной (индуцированной) теории на подкомплексе с помощью БВ-интеграла. По конструкции, индуцированное действие, так же как и исходное, решает квантовое мастер-уравнение Баталина–Вилковыского. Симплициальной BF-теории соответствует индуцирование с $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на $\mathfrak{g}$-значные клеточные коцепи триангуляции. Далее, имеет место свойство симплициальной локальности действия симплициальной BF-теории: действие раскладывается в сумму локальных вкладов от отдельных симплексов триангуляции. Таким образом, чтобы знать действие симплициальной BF-теории, нужно лишь проделать универсальное вычисление для одного симплекса каждой размерности. Это вычисление проделано в размерностях 0 и 1 явно, а в старших размерностях получены пертурбативные результаты (вычислены значения нескольких первых фейнмановских диаграм для БВ-интеграла).

Конструкция индуцирования эффективной теории с помощью БВ-интеграла имеет также интерпретацию в терминах гомотопической алгебры: действие абстрактной BF-теории можно понимать как производящую функцию для операций дифференциальной градуированной алгебры Ли, а действие индуцированной теории – как производящую функцию для структуры квантовой L_∞-алгебры на подкомплексе и БВ-интеграл задает гомотопический перенос. Существуют также другие конструкции индуцированных бесконечность-алгебр с помощью БВ-интеграла [6, 2].

Симплициальную BF-теорию можно рассматривать как инструмент, дающий топологические инварианты многообразий и узлов (после включения в теорию наблюдаемых) в терминах конечнократных интегралов. Точнее: стартуя с симплициальной BF-теории на клеточных коцепях триангуляции, можно индуцировать эффективное действие на когомологиях де Рама многообразия. Древесная часть действия на когомологиях содержит информацию о рациональном гомотопическом типе многообразия, а квантовая дает некоторые дополнительные инварианты многообразия. То, что с узлами связаны наблюдаемые в BF-теории, известно из [3]. Включение симплициальных аналогов этих наблюдаемых в симплициальную

*Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской Академии наук*

BF-теорию позволило бы вычислять некоторые инварианты узлов в виде кратных интегралов.

АБСТРАКТНАЯ BF-ТЕОРИЯ

Пусть V – это $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство. Построим по V "пространство полей"

$$\mathcal{F} := V[-1] \oplus V^*[+2], \qquad (1)$$

где $[k]$ – сдвиг по градуировке на k, V^* – двойственное пространство к V. Кольцо функций на $\mathcal{F}$ определяется как симметрическая алгебра над $\mathcal{F}^*$ с коэффициентами в формальных степенных рядах от $\hbar$:

$$\mathrm{Fan}(\mathcal{F}) := S^{\bullet}(V^*[+1] \oplus V[-2])[[\hbar]]$$

Здесь $S^{\bullet}$ – симметрическая алгебра, а $\hbar$ – постоянная Планка. Будем называть градуировку в V и V^* степенью (deg), а градуировку в $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ – духовым числом (gh). Каноническое спаривание V с V^* задает каноническую структуру алгебры Баталина–Вилковыского на $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$, с каноническим БВ-оператором Δ. В свою очередь Δ определяет каноническую нечетную скобку Пуассона $\{\bullet, \bullet\}$ на $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$.

Введем также два сдвинутых по градуировке тождественных отображения ω: $V[-1] \to V$ и p: $V^*[+2] \to V^*$. Мы понимаем ω и p как две функции на $\mathcal{F}$ со значениями в V и V^* соответственно. Мы будем называть ω и p полями, поскольку они являются производящими функциями для координатных функций на $\mathcal{F}$.

Пусть теперь на V есть структура дифференциальной градуированной алгебры Ли (DGLA), т.е. задана пара отображений d: $V \to V$ и $[\bullet, \bullet]$: $V \otimes V \to V$ степеней +1 и 0 соответственно (дифференциал и скобка Ли), причем скобка градуированно-кососимметрична и выполнены три тождества DGLA: $d^2 = 0$, тождество Лейбница и тождество Якоби. Потребуем дополнительно, чтобы V была унимодулярна, т.е. для любого $\alpha \in V$ выполнено $\mathrm{Str}_V\,[\alpha, \bullet] = 0$ (здесь Str_V – супер-след по V). Тогда мы построим по структуре DGLA на V функцию

$$S := \left\langle p, d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right\rangle \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}),$$

решающую квантовое мастер-уравнение Баталина–Вилковыского (QME): $\Delta e^{S/\hbar} = 0$, или в эквивалентной форме $\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S = 0$. В данном случае, поскольку S не зависит от $\hbar$, QME разделяется на классическую и собственно квантовую часть: $\{S, S\} = 0$ и $\Delta S = 0$. Классическое мастер-уравнение в данном случае эквивалентно тройке соотношений в DGLA – $d^2 = 0$, тождеству Лейбница и тождеству Якоби. Квантовая часть QME эквивалентна условию унимодулярности для V. Функция S обладает свойством $\mathrm{gh}(S) = 0$. Мы называем S действием абстрактной BF-теории, построенной по V.

В координатах конструкция выглядит следующим образом. Пусть $\{e_i\}$ – базис в V, $\{e^i\}$ – двойственный базис в V^*, $\{\omega^i\}$ и $\{p_i\}$ – соответствующие сдвинутые базисы в $V^*[+1]$ и $V[-2]$. Введем обозначение $|i| := \deg(e_i)$ для степеней базисных элементов в V. Тогда $\deg(e^i) = -|i|$, $\mathrm{gh}(\omega^i) = 1 - |i|$, $\mathrm{gh}(p_i) = |i| - 2$. Алгебра функций $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ есть алгебра степенных рядов от переменных $\{\omega^i\}$, $\{p_i\}$ с коэффициентами в $\mathbb{R}[[\hbar]]$:

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}[[\hbar]]\,[[\{\omega^i\}, \{p_i\}]].$$

Структура БВ-алгебры задается дифференциальным оператором

$$\Delta := \sum_i \frac{\partial}{\partial\omega^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

степени $\mathrm{gh}(\omega) = +1$. Поля ω и p, понимаемые как элементы пространств $V^*[+1] \otimes V$ и $V^* \otimes V[-2]$ соответственно, имеют вид $\omega = \sum_i \omega^i e_i$ и $p = \sum_i e^i p_i$.

Пусть d^i_j и f^i_{jk} – структурные константы дифференциала и скобки Ли в V: $d(e_j) = \sum_i d^i_j e_i$, $[e_j, e_k] = \sum_{j,k} f^i_{jk} e_i$. Тогда действие имеет вид

$$S = \sum_{i,j}(-1)^{|j|+1} d^i_j p_i \omega^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-1)^{|j|(|k|+1)} f^i_{jk} p_i \omega^j \omega^k.$$

Таким образом, действие абстрактной BF-теории можно назвать производящей функцией для структуры DGLA на V, причем, как было отмечено выше, производящим уравнением для тройки соотношений DGLA и условия унимодулярности является квантовое мастер-уравнение.

Стандартной BF-теории на многообразии M с калибровочной группой G соответствует выбор $V = \mathfrak{g} \otimes \Omega^{\bullet}(M)$.

ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Пусть V – унимодулярная DGLA, пусть V' – деформационный ретракт V и заданы вложение и ретракция – пара цепных отображений ι: $V' \to V$ и r: $V \to V'$, и выполнено $r\iota = \mathrm{id}_{V'}$. Тем самым задано разложение V в прямую сумму подкомплексов $V = \iota(V') \oplus V''$, где $V'' = \ker r$, причем V'' ацикличен. Пусть также задана цепная гомотопия K, стягивающая V на V'. То есть отображение K: $V \to V$ степени –1, удовлетворяющее $K\iota = 0$, $rK = 0$, $dK + Kd =$

$= 1 - \iota r$, $K^2 = 0$. Тройка отображений (ι, r, K) определяет разложение Ходжа для V на образ V', d-точную часть V'' и K-точную часть V'':

$$V = \iota(V') \oplus V''_{d-\mathrm{ex}} \oplus V''_{K-\mathrm{ex}}.$$

Отображения d: $V''_{K-\mathrm{ex}} \to V''_{d-\mathrm{ex}}$ и K: $V''_{d-\mathrm{ex}} \to V''_{K-\mathrm{ex}}$ являются взаимно обратными. Двойственная тройка (r^*, ι^*, K^*) определяет двойственное разложение Ходжа для V^*:

$$V^* = r^*(V'^*) \oplus V''^*_{d^*-\mathrm{ex}} \oplus V''^*_{K^*-\mathrm{ex}}.$$

По V' и V'' мы строим пространства полей $\mathcal{F}' := V'[-1] \oplus V'^*[+2]$, $\mathcal{F}'' := V''[-1] \oplus V''^*[+2]$ с канонической БВ-структурой. Поля ω и p соответственно разбиваются как $\omega = \iota(\omega') + \omega''$, $p = r^*(p') + p''$. По гомотопии K мы строим лагранжево подмногообразие $\mathcal{L} := V''_{K-\mathrm{ex}}[-1] \oplus V''^*_{K^*-\mathrm{ex}}[+2] \subset \mathcal{F}''$.

По BF-действию S на $\mathcal{F}$ мы конструируем эффективное действие $S' \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ с помощью интеграла по $\mathcal{L}$ (БВ-интеграл'):

$$\exp\left(\frac{1}{\hbar}S'(\omega', p'; \hbar)\right) := \int_{\mathcal{L}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}S(\iota(\omega') + \omega'', r^*(p') + p'')\right)\mu_{\mathcal{L}}. \tag{2}$$

Здесь $\mu_{\mathcal{L}}$ – трансляционно-инвариантная форма объема на $\mathcal{L}$.

Согласно теореме А. Шварца [7] (версия теоремы Стокса для интеграла БВ-кограницы по лагранжевому подмногообразию), эффективное действие S' по конструкции удовлетворяет квантовому мастер-уравнению на $\mathcal{F}'$: $\Delta' e^{S'/\hbar} = 0$. Здесь Δ' означает канонический БВ-оператор на $\mathcal{F}'$. Выбор лагранжева подмногообразия $\mathcal{L}$ в (2), как обычно в БВ-формализме, означает выбор фиксации калибровки. Наш выбор строить $\mathcal{L}$ по разложению Ходжа есть вариант калибровки Лоренца. Согласно другой теореме А. Шварца, выбор другого $\mathcal{L}$ в том же классе кобордизма лагранжевых подмногообразий приводит к эквивалентному эффективному действию, т.е. $e^{S'/\hbar}$ изменяется на БВ-кограницу (Δ' – точный член).

Интеграл (2) можно вычислять пертурбативно: S' есть сумма связных ориентированных фейнмановских графов, где разрешены внешние входящие и исходящие ребра и только 3-валентные внутренние вершины со специальной ориентацией: два входящих и одно исходящее ребро. Тем самым есть графы двух видов: древесные – бинарные корневые деревья (без планарной структуры) и однопетлевые – графы с одним ориентированным циклом, в который воткнуты несколько деревьев. Графов со старшим числом петель в интеграле (2) нет. На внутренних ребрах вычисляется пропагатор K, листьям (входящим внешним ребрам) сопоставляется $\iota(\omega')$, корню (исходящему ребру) – операция $\langle r^*(p'), \bullet\rangle$, в вершинах вычисляется скобка Ли $[\bullet, \bullet]$. Кроме этого в значение графа входит его симметрийный коэффициент и множитель $\hbar$, если граф однопетлевой.

Первые члены пертурбативного разложения для (2) имеют следующий вид:

$$S'(\omega', p'; \hbar) = \langle p', d\omega'\rangle + \frac{1}{2}\langle p', r([\iota(\omega'), \iota(\omega')])\rangle - \\ - \frac{1}{2}\langle p', r([K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], \iota(\omega')])\rangle + \\ + \ldots - \hbar \mathrm{Str} K[\iota(\omega'), \bullet] + \hbar\frac{1}{2}\mathrm{Str} K[\iota(\omega'), K[\iota(\omega'), \bullet]] + \\ + \hbar\frac{1}{2}\mathrm{Str} K[K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], \bullet] + \ldots$$

Здесь супер-следы, соответствующие однопетлевым диаграммам, вычисляются по пространству $V[-1]$.

Общая структура эффективного действия для BF-теории такова:

$$S'(\omega', p'; \hbar) = \sum_i p'_i Q'^i(\omega') + \hbar \ln \rho'(\omega'). \tag{3}$$

Здесь первое слагаемое – вклад деревьев, второе – вклад однопетлевых диаграмм. Из Q'^i удобно составить дифференциальный оператор первого порядка $Q' = Q'^i(\omega')\dfrac{\partial}{\partial \omega'^i}$ на $\mathrm{Fun}(V'[-1])$ (иначе, векторное поле на $V'[-1]$) – БРСТ-дифференциал эффективной теории. Тем самым действие S' составлено из векторного поля Q' и функции ρ' на $V'[-1]$. Квантовое мастер-уравнение для S' эквивалентно паре соотношений $Q'^2 = 0$ (классическая часть QME) и $\rho' \mathrm{div} Q' + Q'(\rho') = 0$ (собственно квантовая часть). Первое соотношение означает, что Q' задает когомологическое векторное поле на $V'[-1]$, второе – что ρ' является плотностью Q'-инвариантной меры на $V'[-1]$: $\mathrm{Lie}_{Q'}(\rho'\mu_{V'[-1]}) = 0$, где $\mathrm{Lie}_{Q'}$ – производная Ли вдоль Q' и $\mu_{V'[-1]}$ – трансляционно-инвариантная мера на $V'[-1]$.

Эффективное BF-действие имеет естественную интерпретацию в терминах гомотопической алгебры: древесная (классическая) часть эффективного действия является производящей функцией для структуры L_∞-алгебры на V', причем разложение по фейнмановским диаграммам эквивалентно классическим формулам гомотопической алгебры для индуцированной L_∞-структуры на деформационном ретракте. В то же время однопетлевая часть S' дает в дополнение к этой структуре плотность Q'-инвариантной меры ρ' на $V'[-1]$. Тройку $(\mathrm{Fun}(V'[-1]), Q', \rho')$ можно понимать как квантовую версию L_∞-структуры на V'.

Естественно расширить класс абстрактных BF-теорий, ассоциированных с унимодулярными DGLA, до класса BF_∞-теорий, связанных с квантовыми L_∞-алгебрами, с действием вида (3) и каноническим пространством полей (1). Класс BF_∞-теорий замкнут относительно операции индуцирования эффективной теории на подкомплексе.

СИМПЛИЦИАЛЬНАЯ BF-ТЕОРИЯ

Нас интересует следующий частный пример конструкции индуцирования эффективного действия. Пусть M – многообразие, на котором задана триангуляция T, и пусть G – компактная группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Положим $V = \mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(M)$ – DGLA $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на M, где дифференциал – обычный внешний дифференциал для форм и скобка задается внешним умножением в формах и скобкой в коэффициентах. Как мы отмечали выше, абстрактная BF-теория, ассоциированная с таким V, – это как раз обычная BF-теория. Интересующий нас деформационный ретракт – комплекс $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей на триангуляции T: $V' = \mathfrak{g} \oplus C^\bullet(T)$. Эффективное действие S' для этого случая мы называем действием симплициальной BF-теории на триангуляции T. Будем обозначать это эффективное действие S_T.

При этом используются следующие данные (ι, r, K) разложения Ходжа, определяющие фиксацию калибровки в БВ-интеграле. В качестве вложения ι мы используем отображение Уитни ι: $C^\bullet(T) \to \Omega^\bullet(M)$, вкладывающее комплекс клеточных коцепей на T в кусочно-линейные дифференциальные формы на M. Ретракция r: $\Omega^\bullet(M) \to C^\bullet(T)$ задается с помощью интегралов по симплексам триангуляции. В качестве K: $\Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet-1}(M)$ мы используем явную конструкцию Дюпона [5] для оператора цепной гомотопии между $\mathrm{id}_{\Omega^\bullet(M)}$ и проекцией на формы Уитни ιr. Отметим, все три отображения (ι, r, K) действуют нетривиально на формах $\Omega^\bullet(M)$ и тривиально в коэффициентах $\mathfrak{g}$.

Поля симплициальной BF-теории раскладываются по базисным коцепям и цепям как $\omega' = \sum_{\sigma\in T}\omega^\sigma e_\sigma$, $p' = \sum_{\sigma\in T} e^\sigma p_\sigma$, где $\omega^\sigma \in \mathfrak{g}[1-|\sigma|]$, $p_\sigma \in \mathfrak{g}^*[-2+|\sigma|]$. Здесь $|\sigma|$ означает размерность симплекса σ. Действие $S'(\omega', p'; \hbar)$ симплициальной BF-теории обладает следующим важнейшим свойством “симплициальной локальности": оно раскладывается в сумму по всем симплексам σ триангуляции вкладов $\bar{S}_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma}, p_\sigma; \hbar)$, зависящих только от значения поля p на самом σ и значений ω на всех гранях σ. Это свойство, в частности, означает, что для того чтобы получить действие сиплициальной BF-теории на произвольной триангуляции произвольного многообразия, достаточно вычислить симплициальное действие для одного симплекса каждой размерности (со стандартной триангуляцией). Таким образом, нужно одно универсальное вычисление интеграла (2) для симплекса в каждой размерности $D = 0, 1, 2, \ldots$

В размерности $D = 0$ ответ тривиален: для 0-симплекса индукция с дифференциальных форм на симплициальные коцепи является тождественной операцией, так как $V = V'$. Ответ в этом случае: $\bar{S}_A = \left\langle p_A, \frac{1}{2}[\omega^A, \omega^A]\right\rangle_\mathfrak{g}$ (здесь A – имя единственной вершины 0-симплекса, $\langle\bullet, \bullet\rangle_\mathfrak{g}$ – каноническое спаривание между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$).

В размерности $D = 1$ индукция нетривиальна, однако БВ-интеграл вычисляется точно, так как оказывается для этого случая гауссовым. Здесь ответ:

$$\bar{S}_{AB} =$$
$$= \left\langle p_{AB}, \left[\frac{\omega^A+\omega^B}{2}, \omega^{AB}\right] - \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{AB}}}{2}\mathrm{cth}\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{AB}}}{2}\right)(\omega^B-\omega^A)\right\rangle_\mathfrak{g} +$$
$$+ \hbar\,\mathrm{tr}_\mathfrak{g}\ln\frac{\mathrm{sh}\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{AB}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{AB}}}{2}}$$

(здесь A и B – вершины 1-симплекса, $\mathrm{tr}_\mathfrak{g}$ – след по $\mathfrak{g}$).

В старших размерностях $D \ge 2$ БВ-интеграл уже не сводится к гауссовому, и мы не можем написать явной формулы для $\bar{S}_\sigma$ для D-симплекса σ. Однако можно вычислять значения конкретных фейнмановских диаграм для БВ-интеграла и предъявить пертурбативный ответ, начальный отрезок ряда по степеням ω'. В частности, вклады древесных диаграм с $c \le 3$ листьями и петлевых с ≤ 2 листьями дают следующее пертурбативное приближение к $\bar{S}$ (с точностью до $O(p'\omega'^4 + \hbar\omega'^3)$):

$$\bar{S}_\sigma = \left\langle p_\sigma, \sum_{\sigma_1\subset\sigma} C^1_{\sigma,\sigma_1}\omega^{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma} C^2_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}[\omega^{\sigma_1}, \omega^{\sigma_2}] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\subset\sigma}[[\omega^{\sigma_1}, \omega^{\sigma_2}], \omega^{\sigma_3}]\right\rangle_\mathfrak{g} +$$
$$+ \frac{1}{2}\hbar\sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma} Q^2_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}\mathrm{tr}_\mathfrak{g}(\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_1}}\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_2}}) + \ldots$$

Здесь C^1, C^2, C^3, Q^2 – некоторые комбинаторные коэффициенты. А именно: $C^1_{\sigma,\sigma_1} = \pm 1$, если σ_1 –

грань σ коразмерности 1 (знак зависит от взаимной ориентации), и $C^1 = 0$ в противном случае. Далее, $C^2_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2} = \pm\frac{|\sigma_1|!|\sigma_2|!}{(D+1)!}$, если σ_1 и σ_2 – пара граней σ суммарной размерности D и пересекающихся только по одной вершине. В противном случае $C^2 = 0$. Следующий коэффициент $C^3_{\sigma,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3} = \pm\frac{|\sigma_1|!|\sigma_2|!|\sigma_3|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)(D+1)!}$, если σ_1, σ_2, σ_3 – тройка граней σ суммарной размерности $D + 1$, причем у σ_1 и σ_2 ровно одна общая вершина и она содержится в σ_3. В противном случае $C^3 = 0$. Наконец, $Q^2_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2} = \mathcal{A}_D + (D-1)\mathcal{B}_D$, если σ_1 совпадает с σ_2 и имеет размерность 1; $Q^2_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2} = \pm 2\mathcal{B}_D$, если σ_1 и σ_2 имеют размерность 1 и пересекаются по одной вершине; в противном случае $Q^2 = 0$. Для коэффициента $\mathcal{A}_D$ известно явное выражение для любой размерности: $\mathcal{A}_D = \frac{(-1)^{D+1}}{(D+1)^2(D+2)}$, а для $\mathcal{B}_D$ известны только значения при $D = 2, 3$: $\mathcal{B}_2 = \frac{1}{270}$, $\mathcal{B}_3 = -\frac{1}{648}$.

Вычисление коэффициентов C^1, C^2, C^3 сводится к некоторым кратным интегралам (так как конструкция Дюпона дает выражение для пропагатора K в виде кратного интеграла). Задача нахождения Q^2 намного сложнее как технически, так и концептуально: это вычисление суперследа некоторого интегрального оператора по пространству дифференциальных форм на симплексе. Этот суперслед потенциально содержит в себе расходимость (что характерно для петлевых фейнмановских диаграмм в квантовой теории поля). Однако проделанные нами явные вычисления в размерностях $D = 2, 3$ показали сокращение этой расходимости для первой нетривиальной квантовой операции (для размерности 2 показано сокращение расходимостей во всех фейнмановских диаграммах).

Автор хочет выразить признательность А.С. Лосеву за идеи и задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleksandrov M., Kontsevich M., Schwarz A, Zaboronsky O* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 1405–1430.
2. *Alexandrov V., Krotov D., Losev A., Lysov L.* On Pure Spinor Superfield Formalism. arXiv:0705.2191.
3. *Cattaneo A.S., Cotta-Ramusino P., Froehlich J., Martellini M.* // J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6137–6160.
4. *Mnev P.* Notes on simpliciall BF theory arXiv:hep-th/0610326..
5. *Dupont J.* // Topology. 1976. V. 15. P.233–245.
6. *Krotov D., Losev A.* Quantum Field Theory as Effective BV Thyeory from Chern-Simons. arXiv:hep-th/0603201.
7. *Schwarz A.* // Communs. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 249–260.