

Solutions to selected review problems (not guaranteed free of errors)

I. Propositional logic

1. (h) $\vdash (P \vee \neg P)$

1	1. $\neg(P \vee \neg P)$		A (use RAA) show $\neg P, \neg\neg P$
2	2. P		A
2	3. $(P \vee \neg P)$	2	$\vee I$
1,2	4. $(P \vee \neg P) \& \neg(P \vee \neg P)$	3,1	$\&I$
1	5. $\neg P$	2,4	RAA
6	6. $\neg P$		A
6	7. $(P \vee \neg P)$	6	$\vee I$
1,6	8. $(P \vee \neg P) \& \neg(P \vee \neg P)$	7,1	$\&I$
1	9. $\neg\neg P$	6,8	RAA
1	10. $(\neg P \& \neg\neg P)$	5,9	$\&I$
	11. $(P \vee \neg P)$	1,10	RAA

5. (a) $\neg(P \& Q) \dashv\vdash (\neg P \vee \neg Q)$

1	1. $\neg(P \& Q)$		A
2	2. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$		A (use RAA) show $(P \& Q)$
3	3. $\neg P$		A (use RAA)
3	4. $(\neg P \vee \neg Q)$	3	$\vee I$
2,3	5. $(\neg P \vee \neg Q) \& \neg(\neg P \vee \neg Q)$	4,2	$\&I$
2	6. $\neg\neg P$	3,5	RAA
2	7. P	6	DN
8	8. $\neg Q$		A
8	9. $(\neg P \vee \neg Q)$	8	$\vee I$
2,8	10. $(\neg P \vee \neg Q) \& \neg(\neg P \vee \neg Q)$	9,2	$\&I$
2	11. $\neg\neg Q$	8,10	RAA
2	12. Q	11	DN
2	13. $(P \& Q)$	7,12	$\&I$
1,2	14. $(P \& Q) \& \neg(P \& Q)$	13,1	$\&I$
1	15. $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,14	RAA
1	16. $(\neg P \vee \neg Q)$	15	DN

1	1. $(\neg P \vee \neg Q)$		A
2	2. $(P \& Q)$		A (use RAA)
3	3. $\neg P$		A (use $\vee E$) show $\neg(P \& Q)$
2	4. P	2	$\&E$
2,3	5. $(P \& \neg P)$	4,3	$\&I$
3	6. $\neg(P \& Q)$	2,5	RAA
7	7. $\neg Q$		A
2	8. Q	2	$\&E$
2,7	9. $(Q \& \neg Q)$	8,7	$\&I$
7	10. $\neg(P \& Q)$	2,9	RAA
1	11. $\neg(P \& Q)$	1,3,6,7,10	$\vee E$
1,2	12. $(P \& Q) \& \neg(P \& Q)$	2,11	$\&I$
1	13. $\neg(P \& Q)$	2,12	RAA

5. (b) $\neg(P \vee Q) \dashv\vdash (\neg P \& \neg Q)$

1	1. $\neg(P \vee Q)$		A
2	2. P		A (use RAA)
2	3. $(P \vee Q)$	2	$\vee I$
1,2	4. $(P \vee Q) \& \neg(P \vee Q)$	3,1	$\&I$
1	5. $\neg P$	2,4	RAA
6	6. Q		A (use RAA)
6	7. $(P \vee Q)$	6	$\vee I$
1,6	8. $(P \vee Q) \& \neg(P \vee Q)$	7,1	$\&I$
1	9. $\neg Q$	6,8	RAA
1	10. $(\neg P \& \neg Q)$	5,9	$\&I$

1	1. $(\neg P \& \neg Q)$		A
1	2. $\neg P$	1	$\&E$
1	3. $\neg Q$	1	$\&E$
4	4. $(P \vee Q)$		A (use RAA)
5	5. P	A	(use $\vee E$)
1,5	6. $(P \& \neg P)$	5,2	$\&I$
1,5	7. $\neg(P \vee Q)$	4,7	RAA
8	8. Q		A (use RAA)
1,8	9. $(Q \& \neg Q)$	8,3	$\&I$
1,8	10. $\neg(P \vee Q)$	4,9	RAA
1,4	11. $\neg(P \vee Q)$	4,5,7,8,10	$\vee E$
1,4	12. $(P \vee Q) \& \neg(P \vee Q)$	4,11	$\&I$
1	13. $\neg(P \vee Q)$	4,12	RAA

5. (c) $\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash (P \& \neg Q)$

1	1. $\neg(P \rightarrow Q)$		A
2	2. $\neg P$		A (use RAA) show $(P \rightarrow Q)$
3	3. P		A (use CP) show Q
4	4. $\neg Q$		A
2,3	5. $(P \& \neg P)$	3,2	$\&I$
2,3	6. Q	4,5	RAA
2	7. $(P \rightarrow Q)$	3,6	CP
1,2	8. $(P \rightarrow Q) \& \neg(P \rightarrow Q)$	7,1	$\&I$
1	9. $\neg\neg P$	2,8	RAA
1	10. P	9	DN
11	11. Q		A (use RAA)
11	12. $(P \rightarrow Q)$	3,11	CP
1,11	13. $(P \rightarrow Q) \& \neg(P \rightarrow Q)$	12,1	$\&I$
1	14. $\neg Q$	11,13	RAA
1	15. $(P \& \neg Q)$	10,14	$\&I$

1	1. $(P \& \neg Q)$		A
2	2. $(P \rightarrow Q)$		A (use RAA)
1	3. P	1	$\&E$

1,2	4. Q	3,2	MPP
1	5. $\neg Q$	1	&E
1,2	6. $(Q \& \neg Q)$	4,5	&I
1	7. $\neg(P \rightarrow Q)$	2,6	RAA

II. Predicate Logic

4. (j) $\vdash (\exists x) x = a$

1	1. $\neg(\exists x) x = a$	A	(use RAA)
	2. $a = a$		=I
3	3. $b = a$		A (use RAA)
3	4. $(\exists x) x = a$	3	EI
1,3	5. $(\exists x) x = a \& \neg(\exists x) x = a$	4,1	&I
1	6. $\neg b = a$	3,5	RAA
1	7. $(x) \neg x = a$	6	UI
1	8. $\neg a = a$	7	UE
1	9. $(a = a \& \neg a = a)$	2,8	&I
	10. $(\exists x) x = a$	1,9	RAA

6. (a) $\neg(x) Fx \dashv\vdash (\exists x) \neg Fx$

1	1. $\neg(x) Fx$	A	
2	2. $\neg(\exists x) \neg Fx$	A	(use RAA) show $Fa, (x) Fx$
3	3. $\neg Fa$	A	(use RAA)
3	4. $(\exists x) \neg Fx$	3	EI
2,3	5. $(\exists x) \neg Fx \& \neg(\exists x) \neg Fx$	4,2	&I
2	6. $\neg\neg Fa$	3,5	RAA
2	7. Fa	6	DN
2	8. $(x) Fx$	7	UI
1,2	9. $(x) Fx \& \neg(x) Fx$	8,1	&I
1	10. $\neg\neg(\exists x) \neg Fx$	2,9	RAA
1	11. $(\exists x) \neg Fx$	10	DN

1	1. $(\exists x) \neg Fx$	A	
2	2. $(x) Fx$	A	(use RAA)
3	3. $\neg Fa$	A	(use EE)
2	4. Fa	2	UE
2,3	5. $(Fa \& \neg Fa)$	4,3	&I
3	6. $\neg(x) Fx$	2,5	RAA
1	7. $\neg(x) Fx$	1,3,6	EE

(b) $\neg(\exists x) Fx \dashv\vdash (x) \neg(Fx)$

1	1. $\neg(\exists x) Fx$	A	
2	2. Fa	A	(use RAA)
2	3. $(\exists x) Fx$	2	EI
1,2	4. $(\exists x) Fx \& \neg(\exists x) Fx$	3,1	&I
1	5. $\neg Fa$	2,4	RAA
1	6. $(x) \neg Fx$	5	UI

1	1. $(x) \neg Fx$	A	
---	------------------	---	--

2	2. $(\exists x) Fx$		A	(use RAA)
3	3. Fa		A	(use EE)
1	4. $\neg Fa$	1	UE	
1,3	5. $(Fa \ \& \ \neg Fa)$	3,4	&I	
1,3	6. $\neg(\exists x) Fx$		2,5	RAA
1,2	7. $\neg(\exists x) Fx$		1,2,6	EE
1,2	8. $(\exists x) Fx \ \& \ \neg(\exists x) Fx$		2,7	&I
1	9. $\neg(\exists x) Fx$		2,8	RAA
(c) $Fa \ \dashv\vdash \ (x) (x = a \ \supset \ Fx)$				
1	1. Fa		A	
2	2. $b = a$		A	
	3. $b = b$		=I	
2	4. $a = b$	3,2	=E	
1,2	5. Fb	1,4	=E	
1	6. $(b = a \rightarrow Fb)$	2,5	CP	
1	7. $(x) (x = a \rightarrow Fx)$	6	UI	
1	1. $(x) (x = a \rightarrow Fx)$		A	
1	2. $(a = a \rightarrow Fa)$	1	UE	
	3. $a = a$		=I	
1	4. Fa	3,2	MPP	