Вокруг пространств модулей плоских связностей

(1)

План:

① модули пл. связностей, общие опред. и свойства, примеры

② симплектическая структура Атьи-Ботта ← кл. Черн-Саймонс
- предквантовое лин. расслоение — редукция Марсдена-Вайнштейна; комплексиф. редукция
- связь с теорией Черна-Саймонса

③ - кручение ~~модулей~~ Рэя-Зингера для 3-многообразия
- суперсимпл. стр-ра, кас. пр-ва, особенности,

④ объёмы пр-в модулей для поверхностей, ← кв. 2D Янг-Миллс
ф-ла Виттена для этих объёмов

? геом. квантование пр-ва модулей; формула Верлинде ← кв. 3D Черн-Саймонс ; ← кв. 2d Весс-Зумино-Виттен

G - группа Ли, M - многообразие (гладкое, ?компактное)

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

связность ∇ в трив. G-рассл. $M \times G \circlearrowleft G$, $\downarrow M$ задаётся своей 1-формой $A \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M) = \Omega^1(M, \mathfrak{g})$

связность ∇ плоская, если $F_\nabla = dA + \frac{1}{2}[A, A] \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$, $F_\nabla = 0$

калибровочные преобразования: $A \longmapsto A' = gAg^{-1} + g\,dg^{-1}$

пр-во модулей: $\mathcal{M}^{\mathrm{triv}}(M, G) = \{A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \mid dA + \frac{1}{2}[A,A] = 0\} \Big/ A \sim gAg^{-1} + g\,dg^{-1}$, $g: M \to G$ - калибр. преобразование

(triv — в триб. трив. расслоении)

$\boxed{\text{Пример: } G = \mathbb{R},\ \mathcal{M}^{\mathrm{triv}}(M, \mathbb{R}) = H^1_{\mathrm{deRham}}(M)}$

более общий случай: $P \circlearrowleft G$, $\downarrow M$ - какое-то главное G-расслоение

G-эквивар. связность Эресмана на P (**) распред. $T^{\mathrm{hor}} P \hookrightarrow TP$ — $\nabla \longrightarrow$ кривизна $F_\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}_P)$

$\mathrm{ad}_P = P \times_G \mathfrak{g}$, $G \circlearrowleft_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$

Параллельный перенос:

∇ - связность, γ - путь на M из x в y $\longrightarrow \mathrm{Hol}_\gamma(\nabla): P_x \to P_y$

$F_\nabla = 0 \iff \mathrm{Hol}_\gamma(\nabla)$ не меняется при гомотопии γ (с фиксир. концами x, y)

Т.о. для $\nabla \in \mathrm{FlatConn}(P)$, парал. перенос задаёт функтор между группоидами

$\Pi M \xrightarrow{\mathrm{hol}(\nabla)} \begin{pmatrix} \mathrm{Ob}: \text{точки } x \in M \\ \mathrm{Mor}: G\text{-эквив. отобр. между слоями} \end{pmatrix}$

(Ob: точки M

т.о. калибр. преобр. $\alpha \in \Gamma(M, \mathrm{Aut}(P))$ ~~действует на функтор $hol(\nabla)$~~ $: \nabla \to \nabla'$

действует на функтор hol как естественное преобразование $hol(\nabla) \longrightarrow hol(\nabla')$

Для замкн. путей γ в x, $hol_\gamma(\nabla) \in \mathrm{Aut}(P_x)$ — зав. только от класса γ в $\pi_1(M, x)$

$$\pi_1(M,x) \xrightarrow{hol(\nabla)} \mathrm{Aut}(P_x)$$ — гомоморфизм групп

$\mathrm{Aut}(P_x) \cong G$ если выбрать тривиализацию P_x; смена тривиализации → сопряжение элементом из G

т.о. $hol: \nabla \mapsto \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), G)/G$ ← действует сопряжением — смена тривиализации в P_x

Теорема: ~~Формальное~~ Отображение hol задаёт биекцию

(*) $$\{\text{плоские расслоения } (P, \nabla)\} / \{\text{калибр. преобр. } \nabla \sim \nabla'\} \xrightarrow{hol} \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), G)/G$$

Док-во:

(i) отобр. (*) корректно определено: $\nabla \sim \nabla' \Rightarrow hol_\gamma(\nabla') = \alpha(x)\, \underset{\in \mathrm{Aut}(P_x)}{hol_\gamma(\nabla)}\, \alpha(x)^{-1}$

фиксируя трив. P_x, $hol_\gamma(\nabla') = g \cdot hol_\gamma(\nabla) \cdot g^{-1}$ для фиксированного $g \in G$

$\Rightarrow \nabla$ и ∇' определяют один и тот же эл-т в Hom/G

(ii) инъективность hol:

пусть $hol_\gamma(\nabla') = g \cdot hol_\gamma(\nabla) \cdot g^{-1}$, $g \in G$, $\forall \gamma$, ∇ — связность в P, ∇' — в P'

определим $\forall y \in M$ $\alpha(y) = (hol_{\gamma(x,y)} \nabla')\, g\, (hol_{\gamma(x,y)} \nabla)^{-1} \in \mathrm{Iso}(P_x, P'_x)$

где $\gamma(x,y)$ — некоторый фиксированный путь $x \to y$ $\forall y$

Тогда для любого $\tilde\gamma: u \to v$,

$$hol_{\tilde\gamma}(\nabla') = \alpha(v) \cdot hol_{\tilde\gamma}(\nabla) \cdot \alpha^{-1}(u)$$

$$\| $$

$$hol_{\gamma_v}(\nabla')\, hol_{\gamma_v^{-1}\tilde\gamma\gamma_u}(\nabla')\, hol_{\gamma_u^{-1}}(\nabla')$$

$$\underbrace{\quad g \cdot hol}_{\alpha(v)}{}_{\gamma_v^{-1}\tilde\gamma\gamma_u}\underbrace{(\nabla) \cdot g^{-1}\quad}_{\alpha(u)^{-1}}$$

т.о., построили $\alpha \in \Gamma(M, \mathrm{Iso}(P, P'))$ — изоморфизм $P \cong P'$, переводящий ∇ в ∇'.

(iii) сюръективность: пусть $\chi: \pi_1(M,x) \to G$ и пусть $\tilde M \xrightarrow{p} M$ — унив. накрытие

построим $P = \tilde M \times_{\pi_1(M,x)} G$ ← действует перестановкой листов $\tilde M$ и с пом. χ на G.

$\downarrow$

M $= \tilde M \times G / \pi_1$

связность ∇ в P спускается из тривиальной в $\tilde M \times G \to \tilde M$

фиксируем $\tilde x \in p^{-1}(x)$

Примечание: вообще, $\mathcal{M}^{triv}(M,G) \subset \mathcal{M}(M,G)$

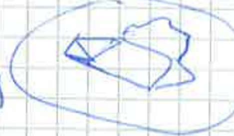
$\mathcal{M}^{triv}(M,G)$ — пр-во модулей плоских связностей в трив. рассл.

$\mathcal{M}(M,G)$ — пр-во модулей плоских расслоений

В зав-ти от M и G, вложение м.б. строгим (если есть нетрив. плоские рассл.) или равенством.

Другие определения (описания)

(1) комбинаторное: пусть T — клеточное разбиение M



$$\mathrm{MLoc}(T,G) = \frac{\{U : \{1\text{-клетки}\} \to G \mid \forall \text{ 2-клетки } F \text{ с рёбрами } e_1,\dots,e_k: \ U(e_1)\cdots U(e_k) = 1\}}{U \sim \{g : \{0\text{-клетки}\} \to G\}: \ U'(\underset{u}{\cdot}\xrightarrow{e}\underset{v}{\cdot}) = g(v)\,U(e)\,g(u)^{-1} \quad \forall g : \{0\text{-клетки}\} \to G}$$

здесь мы выбрали какую-то ориентацию 1- и 2-клеток; $U(\underset{u}{\swarrow}^{v}) := U(\underset{u}{\nearrow}^{v})^{-1}$

$$\mathcal{M}(M,G) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)/G$$

трив. P над вершинами T, вых. параллельный вдоль рёбер $\quad \mathrm{MLoc}(T,G) \nearrow$ голон. вдоль замкн. кончиков, сост. рёбер $x \to x$

(2) $\{$лок. постоянные пучки на $M\}$ / изоморфизм пучков

"лок. системы"

(3) (гладкие) функторы $\Pi_1(M) \to$ ~~Объекты~~ $\mathrm{Hom}(P_x, P_y)$ $\circlearrowleft G$ $*$ / естеств. изоф.

(это $\mathcal{M}^{triv}$ или $\mathcal{M}$?)

(4) отобр. в классифиц. пр-во $G^\delta_{\mathbb{R}}$ с дискр. топологией / гомотопия отобр.

$[M, BG^\delta]$

Примеры:

- G абелева $\Rightarrow$ $\mathcal{M}(M,G) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)/G = \mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}),G) = H^1(M,G)$

теорема об унив. коэф. т.к. $\mathrm{Ext}(H_0(M),G) = 0$

в частности, $G = \mathbb{R}$: $\mathcal{M}(M,\mathbb{R}) = H^1(M,\mathbb{R})$

поэтому $\mathcal{M}$ — неабелево обобщение H^1 (и нелинейное)

- G — дискретная группа $\Rightarrow$ G-расслоение P — накрытие M;

вообще P имеет единственную связность ∇_P, и она плоская

$$\mathcal{M}(M,G) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)/G$$
$$\| $$
$$[M, \underbrace{BG}_{K(G,1)}] \qquad K(G,1) = N\left(\tfrac{G}{\underline{G}}\right)$$

• $G = U(1)$ (или $\mathbb{C}^*$)

$\{$плоские лин. рассл.$\}/_\sim = H^1(M, U(1))$ $\{$все лин. рассл. $L\}/_\sim = H^2(M, \mathbb{Z}) \ni c_1(L)$ — первый класс Черна

$\dots \to H^1(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha} H^1(M,U(1)) \xrightarrow{\beta} H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} H^2(M,\mathbb{R}) \to \dots$

$\mathrm{im}\,\alpha \in \mathcal{M}$ — плоские связности в трив. $U(1)$-рассл.

$\mathrm{im}\,\beta \simeq \{$лин. расслоения, допускающие плоскую связность$\}/_\sim$

$\| $

кручение $H^2(M,\mathbb{Z})$

$\|$

лин. рассл. с $\gamma(c_1) = [\frac{1}{2\pi}\oint_M F_\nabla] = 0 \in H^2(M,\mathbb{R})$ $\Rightarrow F_\nabla = d\Omega,\ \Omega \in \Omega^1(M)$ $\Rightarrow \nabla' = \nabla - \Omega$ — плоская связность на L

ф-ла Черна-Вейля для c_1

• $G = U(1)$, $M = \mathbb{RP}^3$, $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{M}(\mathbb{RP}^3, U(1)) \simeq \mathbb{Z}_2$: $*$ — трив. предст. π_1, $*$ — нетрив. предст.

→ два плоских рассл.: тривиальное и нетривиальное

• $M = \cdot$ (или стягиваемо) $\Rightarrow \mathcal{M}(M, G) = *$

есть только трив. рассл. и все связности калибр. эквивалентны

• $M = S^1 \Rightarrow \mathcal{M}(S^1, G) = G/_G$ — множество классов сопряженности

— многообразие с особенностями

если G полупростая,

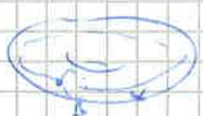
- $G/_G$ м.б. реализовано как "альков Вейля" $\subset \mathfrak{h}^*/_{Weyl}$ — фунд. область для exp

- $G = SU(2)$ $g_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$ $g_\theta \sim g_{-\theta}$ в $G/_G$

$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} g_\theta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

$\mathcal{M} =$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\theta = 0$ — $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $\theta = \pi$

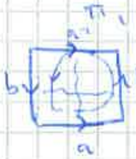
$SU(2)$ $U(1)$ $SU(2)$ — класс сопр. стабилизатора

• $M = S^1 \times S^1$  $\pi_1 = \langle \alpha, \beta \rangle /_{\alpha\beta = \beta\alpha}$

$\mathcal{M} = \underbrace{\{(a,b) \in G \times G \mid ab = ba\}}_{\{\pm 1\} \times G \,\cup\, G \times \{\pm 1\} \,\cup\, \{(g\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{smallmatrix}\right)g^{-1},\ g\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta'} & \\ & e^{-i\theta'}\end{smallmatrix}\right)g^{-1})\}} /_{(a,b) \sim (gag^{-1},\, gbg^{-1})\ \forall g}$

• Бутылка Клейна $\qquad G = SU(2)$

$\pi_1 = \langle \alpha, \beta \rangle / \beta\alpha^{-1}\beta\alpha = 1$



$$\mathcal{M} = \{ a, b \in SU(2) \mid a^{-1} b a = b^{-1} \} / (a,b) \sim (gag^{-1}, gbg^{-1})$$

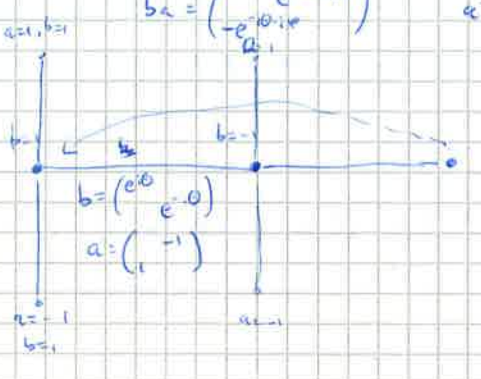
b и b^{-1} имеют одинак. спектр соб. з-ий

$\Rightarrow b \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$

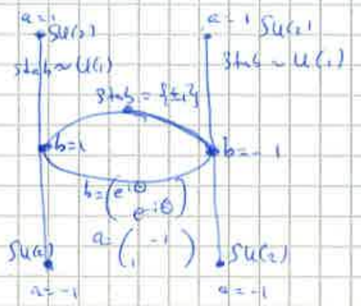
$b = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & \end{pmatrix}, \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} & -e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & \end{pmatrix}$ $\qquad h = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & \\ & e^{-i\psi} \end{pmatrix}$

$ba = \begin{pmatrix} & e^{i\theta + i\varphi} \\ -e^{-i\theta - i\varphi} & \end{pmatrix} \qquad a^{-1}ba = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & \\ & e^{i\theta} \end{pmatrix} = b^{-1}$ $\qquad hah^{-1} = \begin{pmatrix} & e^{i\varphi + 2i\psi} \\ -e^{-i\varphi - 2i\psi} & \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}:$

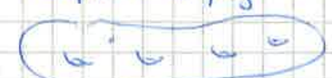


или



• поверхность рода h (ориентируемая, замкнутая)

Σ



$$\pi_1 = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_h, \beta_h \rangle / \underbrace{[\alpha_1, \beta_1]}_{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}} \cdots [\alpha_h, \beta_h] = 1$$

$$\mathcal{M}(\Sigma, G) = \{ a_i, b_i \in G, \ i = 1..h \mid \prod_i^h [a_i, b_i] = 1 \} / (a_1 \dots b_h) \sim (g a_1 g^{-1}, \dots, g b_h g^{-1})$$

$4h$-угольник

$$\dim \mathcal{M}(\Sigma, G) = \begin{cases} (2h-2) \cdot \dim G, & h \geq 2 \\ \mathrm{rk}\, G, & h = 1 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

в старшей клетке

стабилизатор в общей точке: $Z\{\pm 1\} \subset G$
макс. тор $U(1)^{\mathrm{rk}\, G}$
G

пов-сть рода h с n проколами / ~~границей~~ компонентами границы

$$\mathcal{M}(\Sigma_{h,n}, G) = \{ a_i, b_i, c_k \in G, \ \begin{smallmatrix} 1 \leq i \leq h \\ 1 \leq k \leq n \end{smallmatrix} \mid \prod_1^h [a_i, b_i] c_1 \dots c_n = 1 \} / \ \begin{matrix} a_i \mapsto g a_i g^{-1} \\ b_i \mapsto g b_i g^{-1} \\ c_k \mapsto g c_k g^{-1} \end{matrix}$$

$$\dim \mathcal{M}(\Sigma_{h,n}, G) = \underbrace{(2h + n - 2)}_{-\chi(\Sigma_{h,n})} \cdot \dim G \quad , \text{если } \chi < 0.$$

пр. во модулей компл. структур на пов-сти рода $h \geq 2$ без проколов
$\mathcal{M}_{h,0} \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), PSL_2(\mathbb{R})) / PSL_2(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Sigma, PSL_2(\mathbb{R}))$

Примечание.

• на $\mathcal{M}(M, G)$ есть стр-ра группоида, Ob – точки $p \in \mathcal{M}$
$\mathrm{Hom}(p, p) = \mathrm{Stab}_p \subset G$

он эквивалентен группоиду действия (action groupoid) $\quad \mathrm{Hom}(\pi_1, G) \circlearrowleft G \quad$ или $\{$плоские рассл. $(P, \nabla)\} \circlearrowleft$ изоморфизмы

$G \circlearrowright X \to$ Ob $x \in X$

- $\mathcal{M}$ – стратифицированное (особое) многообразие, ↗ классам сопряж. стабилизатора Stab_p

- ~~Если $N \hookrightarrow M$ – подмногообразие (напр. граница), то~~

  Если $f: M \to N$ – отобр. многообр., то есть $\mathcal{M}(M,G) \xleftarrow{f^*} \mathcal{M}(N,G)$

  (pull-back расслоений со связностью)

- Способы увидеть особенности в $\mathcal{M}(M,G)$:

  а) фиксировать подмног. $i: N \hookrightarrow M$ – напр.

$N = \partial M$

  и $q \in \mathcal{M}(N,G)$

  тогда $(i^*)^{-1} q \subset \mathcal{M}(M,G)$ м. б. несобствен

  (напр. фикс. голономию вокруг прокола или граница по кв. сти, или вокруг узла в 3-многообразии)

  б) фиксировать тривиализацию в базовой точке: (⟺ делить на калибр. преобр., тривиальные в x) $g(x) = 1$

  $\mathcal{M}^{fixed}(M,G) = \mathrm{Hom}(\pi_1, G)$ – без фактора по G

Калибровочные преобразования $\mathcal{M}(M,G)$

Лекция 2 / 0

29.05.13

Долги: ① определение калибр. экв.

$$\nabla \leftarrow \tilde{\nabla} \rightarrow \nabla'$$

$M \times \{0\}$ $M \times [0,1]$ $M \times \{1\}$

т/з гомотопию

эквивалентно исходному только если $[M,G] = *$

$\pi_0 \mathrm{Map}(M,G)$

② $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$, так что на $\mathbb{R}P^2$ есть нетрив. плоское лин. рассл.

③ комбинаторная конструкция $\mathcal{M}(M,G)$: фиксируем T – клеточное разбиение M

$$\mathcal{M}(T,G) = \left\{ U: \{\text{рёбра}\} \to G \;\middle|\; \text{для } \forall \text{ 2-клетки } e_n \ldots e_2\, e_1 ,\ U(e_1) \cdot U(e_{...}) \cdots U(e_2) U(e_1) = 1 \right\}$$

$\cong$

$\mathcal{M}(M,G)$ $\quad U \sim U'$, если $U'(e) = g(v)\, U(e)\, g(u)^{-1}$, где $g: \{\text{вершины}\} \to G$

$u \xrightarrow{e} v$

соглашение: как-то ориентировали 1- и 2-клетки; изменение ориентации рёбер: $U(u \nearrow v) = U(u \swarrow v)^{-1}$

$$\mathcal{M}(M;G) \sim \mathrm{Hom}(\pi_1, G)/G$$

$\mathcal{M}(M;G) \to \mathcal{M}(T,G)$: трив. P над вершинами, U = голономии вдоль рёбер

$\mathcal{M}(T,G) \to \mathrm{Hom}(\pi_1,G)/G$: голон. U вдоль лоопов $x \to x$ идущих по рёбрам

Касательное пространство к $\mathcal{M}(M, G)$

2/1

пусть $p = (P, \nabla) \in \mathcal{M}(M, G)$

$d_\nabla : \Omega^k(M, ad(P)) \to \Omega^{k+1}(M, ad(P))$

∇ плоская $\iff (d_\nabla)^2 = 0$

$$F_{\nabla + \underbrace{\alpha}_{\in \Omega^1(M, ad(P))}} = \underbrace{F_\nabla}_{0} + d_\nabla \alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$$

инфинитезимальное калибр. преобр.: $\nabla + \alpha \longmapsto \nabla + \alpha'$, где $\alpha' = \alpha + d_{\nabla+\alpha}\lambda$, $\lambda \in \Omega^0(M, ad(P))$

$$F(\nabla + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \dots) = t\, d_\nabla \alpha_1 + t^2\left(\frac{1}{2}[\alpha_1, \alpha_1] + d_\nabla \alpha_2\right) + \dots$$

$$\nabla + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \dots \underset{\lambda = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \dots}{\sim} \nabla + t(\alpha_1 + d_\nabla \lambda_1) + t^2(\alpha_2 + d_\nabla\lambda_2 + [\alpha_1, \lambda_1]) + \dots$$

в "гладкой точке" $\mathcal{M}$, $T_{(P,\nabla)}\mathcal{M} = H^1_{d_\nabla}(\Omega^\bullet(M, ad(P))) = \dfrac{\{\alpha_1 \in \Omega^1 \mid d_\nabla \alpha_1 = 0\}}{\{\alpha_1 \sim \alpha_1 + d_\nabla \lambda_1,\ \lambda_1 \in \Omega^0\}}$

может случиться, что $\nabla + t\alpha_1$ не продолжается до плоской связности в старших порядках по t: класс $\left[[\alpha_1, \alpha_1]\right] \in H^2_{d_\nabla}$ - препятствие. Если оно равно 0, то $\left[[\underbrace{d_\nabla^{-1}[\alpha_1, \alpha_1]}_{-2\alpha_2}, \alpha_1]\right] \in H^2_{d_\nabla}$ - следующее препятствие и т.д.

Если одно из препятствий $\neq 0$, то ∇ - не гладкая точка.

др. т-зр. $\Omega^\bullet(M, ad(P))$ - gr алг. Ли $(d_\nabla, [\,,\,])$

$$\Big\downarrow \text{ гомот. перенос}$$

$H^\bullet_{d_\nabla}$ - сюда пускается стр-ра L_∞-алгебры $(\ell_2, \ell_3, \dots)$

$\ell_n : \Lambda^n H^\bullet \to H^\bullet$

$\ell_2([\alpha], [\beta]) = [[\alpha, \beta]]$

$\ell_3([\alpha], [\beta], [\gamma]) = [[K[\alpha, \beta], \gamma] \pm$ цикл. перестановки $]$

$K : \Omega^\bullet \to \Omega^{\bullet-1}$ - цепная гомотопия м/ду id и проекцией на $H^\bullet$

$\vdots$

$$MC_{\Omega^\bullet} = \{\alpha \in \Omega^1 \mid d_\nabla \alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\} \Big/ \alpha \sim \alpha + d_\nabla\lambda + [\alpha, \lambda],\ \lambda \in \Omega^0$$

* в окрестности нуля?

$$MC_{H^\bullet} = \{a \in H^1 \mid \underbrace{\tfrac{1}{2!}\ell_2(a,a) + \tfrac{1}{3!}\ell_3(a,a,a) + \dots}_{\in H^2} = 0\} \Big/ a \sim a + \tfrac{1}{1!}\ell_2(a, u) + \tfrac{1}{2!}\ell_3(a, a, u) + \dots,\ u \in H^0$$

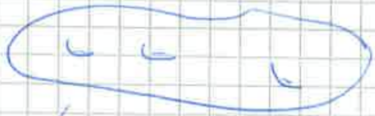
слов., точка $(P, \nabla) \in \mathcal{M}$ имеет окрестность, гомеом. окрестности 0 в $MC_{H^\bullet_{d_\nabla}}$

- она неособа (т. и т.т.)?, когда все индуцированные операции равны 0. (на H^1?)*

2/2

Симплектическая структура Атьи–Ботта

Σ — ориентируемая (двумерная) замкнутая поверхность



фиксируем $(,)_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ невырожд. инвар. спаривание (напр. ф. Киллинга)

G полупростая, односвязная $\quad (\Rightarrow \pi_{1,2}(G) = 0$ и $[\Sigma, G] = *$ $\big)$ и $[\Sigma, BG] = *$, т.е. $P \sim M \times G$ — трив.

$p = \{P_G, [\nabla]\} \in \mathcal{M}$ — гладкая точка, $T_p M = H^1_{d_\nabla = d + A}$

спаривание $\{$ для $\Omega^k(M, \mathrm{ad}(P)) \otimes \Omega^{2-k}(M, \mathrm{ad}(P)) \longrightarrow \mathbb{R}$

(слабо-невырожденное) $\quad (\alpha, \beta) \longmapsto \int_M (\alpha \overset{\wedge}{;} \beta)_{\mathfrak{g}}$

задаёт спаривание на когомологиях

$$H^k_{d_\nabla} \otimes H^{2-k}_{d_\nabla} \to \mathbb{R}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M (\alpha \overset{\wedge}{;} \beta)_{\mathfrak{g}}$$

св-ва: 1) $([\alpha], [\beta]) = (-1)^{k(2-k)} ([\beta], [\alpha])$

2) невырожденность (двойственность Пуанкаре сводя. в лок. системе)

• ограничиваясь на $k=1$, получаем антисимм. невыр. билин. форму: $\omega_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$

$\omega_p \in \Lambda^2 T^*_p \mathcal{M}$

Редукция Марсдена–Вайнштейна

пусть $G \circlearrowright (M, \omega)$ — симплект. многообразие с гамильтоновым действием группы Ли G

$\Updownarrow$ инфинитезимальное действие:

$\mathfrak{g} \to \mathcal{X}_{Ham}(M)$ — гом. алгебр Ли $\quad (*)$

$\xi \mapsto \{\langle \xi, \mu(x) \rangle, \cdot\}_\omega$ где $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ — отображение моментов

$\iota_{v_\xi}\omega = \langle \xi, d\mu \rangle$ ($**$)

μ G-эквивариантно; инфинитезимально: $\{ \mathrm{ad}^*_\xi \mu = \mathcal{L}_{v_\xi} \mu = \{\langle \xi, \mu \rangle, \mu\}$

или $\langle \eta, \mathrm{ad}^*_\xi \mu \rangle = \{\langle \xi, \mu \rangle, \langle \eta, \mu \rangle\} \quad \forall \eta \in \mathfrak{g} \quad (*\psi)$

$\shortparallel$

$\langle [\xi, \eta], \mu \rangle$ — свойство $(*)$

$\mu^{-1}(0) \subset M$ — коизотропное подмногообразие

• алгебраически: $I_{\mu^{-1}(0)} \subset C^\infty(M)$ — идеал ф-й обр. в 0 на $\mu^{-1}(0)$, порождён компонентами μ — пуассонова подалгебра, вследствие $(**)$.

• геометрически: $x \in \mu^{-1}(0)$

$T_x \mu^{-1}(0) = \ker(d\mu)_x \subset T_x M$ $\qquad T_x M \xrightarrow{d\mu} T_0 \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$

$T_x \mu^{-1}(0) \underset{\text{по экв. ор. } \mu}{\supset} \mathrm{Span}\{v_\xi(x)\} \subset (T_x \mu^{-1}(0))^{\perp}$ $\Rightarrow$ — $T_x\mu^{-1}(0)^{\perp} \subset T_x \mu^{-1}(0)$, т.е. $\mu^{-1}(0)$ коизотр.

по $(**)$ $=$ по сравнению

— характеристическое распределение ($\ker \omega|_{\mu^{-1}(0)}$) дается действием $\mathfrak{g}$ $(**)$

нужно ли это?

Thm (Meyer–Marsden–Weinstein) (2/3)

Пусть (M,ω,μ) — симпл. многообр. с гамильтоновым действием G, причём 0 — регулярное значение для μ.
Тогда G действует локально-свободно на $\mu^{-1}(0)$ и $M/\!/G$ — симплектический орбифолд.
Если 0 — особое значение, то $M/\!/G$ — стратифицированное симплект. пр-во. (Sjamaar–Lerman)

Случай плоских связностей на поверхности:

$\tilde G$ группа $Map(M,G)$

$\tilde{\mathfrak g}$ алгебра $\Omega^0(M,\mathfrak g)$

$$G \curvearrowright \underbrace{\Omega^1(M,\mathfrak g)}_{\mathrm{Conn}(M,G)} \xrightarrow{\mu = \text{кривизна}} \Omega^2(M,\mathfrak g) \hookrightarrow (\Omega^0(M,\mathfrak g))^*, \quad F \mapsto \int_M (F \stackrel{\wedge}{,} \cdot)_{\mathfrak g}$$

$$\omega = \frac12 \int_M (\delta A \stackrel{\wedge}{,} \delta A)_{\mathfrak g}$$

$$\xi \in \Omega^0(M,\mathfrak g) \mapsto v_\xi(A) = \int_M \langle d_A \xi, \frac{\delta}{\delta A}\rangle \in T_A\mathrm{Conn}$$

$$\iota_{v_\xi}\omega = \delta\langle \xi, \mu\rangle \quad \text{— проверить!!}$$

$$\mu^{-1}(0) = \mathrm{FlatConn}(\Sigma, G)$$

$$\mu^{-1}(0)/\tilde G = \mathcal M(\Sigma, G), \quad \underline{\omega} \text{ — симпл. стр-ра Атья–Ботта.}$$

Конечномерная конструкция $\quad$ род $\Sigma = h$

$$\mathcal M(\Sigma,G) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),G)/G = \frac{\{(a_1,b_1,\dots,a_h,b_h) \mid \prod_{i=1}^h [a_i,b_i] = 1\}}{(a_i,b_i) \sim (g a_i g^{-1}, g b_i g^{-1})} \quad g \in G$$

$$G \curvearrowright \overbrace{G\times G\times \dots \times G \times G}^{2h \text{ копий}} \xrightarrow{\mu = \prod [a_i,b_i]} G$$

$$\omega = \sum_{i=1}^h (a_i^{-1}da_i \stackrel{\wedge}{,} b_i^{-1}db_i) \quad \left(\text{или } \pm\sum (da_i\, a_i^{-1} \stackrel{\wedge}{,} db_i\, b_i^{-1}) \; ?\right)$$

μ можно понять как отобр. моментов "со зн-ями в G" (Malkin–Meinrenken–Alekseev)
и тогда $\mathcal M = G^{2h}/\!/G$ и $\underline{\omega}$ = форма Атья–Ботта.

Вместо $\iota_{v(\xi)}\omega = \langle d\mu, \xi\rangle \rightsquigarrow \iota_{v(\xi)}\omega = \frac12(\mu^*(g^{-1}dg + dg\, g^{-1}), \xi)_{\mathfrak g}$ $\quad \mu \in C^\infty(M,G)^G$

· $d\omega = \mu^* \frac{1}{12}((g^{-1}dg)^2, g^{-1}dg) \in \Omega^3(M)$

· $\ker\omega \cap \ker d\mu = 0$

Целочисленность формы Атья–Ботта

Пусть G — компактная простая(?) группа

Факт: $\Theta = \frac{1}{24\pi^2}\underset{\text{в фунд. предст.}}{\mathrm{tr}}(g^{-1}dg)^{\wedge 3} \in \Omega^3_{closed}(G)$ $\quad [\Theta] \in H^3(G,\mathbb R) \simeq \mathbb R$ — генератор с целыми периодами:

$$[\Theta] \in \mathrm{im}(H^3(G,\mathbb Z))$$

$$\dots \to H^3(G,\mathbb Z) \to H^3(G,\mathbb R) \to \dots$$

(*)
$$\begin{array}{c} \mathrm{FlatConn}_\Sigma \circlearrowleft \mathrm{Gauge}_\Sigma = Map(\Sigma, G) \\ \downarrow \pi \\ \mathcal M(\Sigma, G) \end{array}$$

(i) $\omega = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\int_\Sigma \delta A \wedge \delta A$ — точная форма на Conn_Σ.

$\omega = \delta\alpha$, $\alpha = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\int_\Sigma A \wedge \delta A \in \Omega^1(\mathrm{Conn}_\Sigma)$

(ii) $\omega|_{\mathrm{FlatConn}}$ базовая (инв+горизонт)

Упр.: периоды α вдоль петель замкн. путей в $\mathrm{Gauge}_\Sigma\, G\ \mathrm{FlatConn}_\Sigma$ $\in 2\pi\cdot\mathbb{Z}$ (2/4)

семейство $g_t : \Sigma \to G$

$g_t : S^1 \times \Sigma \to G$

Док-во: пусть $A \in \mathrm{FlatConn}_\Sigma$

тогда если замкн. кривая $S^1 \xrightarrow{\varphi} \mathrm{FlatConn}_\Sigma$

$t \longmapsto A^{g_t} = g_t A g_t^{-1} + g_t d g_t^{-1}$

утверждается, что $\oint_{S^1} \varphi^* \alpha \in 2\pi\cdot\mathbb{Z}$

$$\oint_{S^1} \varphi^*\alpha = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\int_{S^1\times\Sigma} (g_t A g_t^{-1} + g_t d_\Sigma g_t^{-1}) \wedge \partial_t (g_t A g_t^{-1} + g_t d_\Sigma g_t^{-1}) = \ldots$$ вычисление, лин. и квадр. члены по A сокращаются

$$= \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\int_{S^1\times\Sigma} (g_t d_\Sigma g_t^{-1}) \wedge d_t (g_t d_\Sigma g_t^{-1}) \underset{(\text{т. Стокса})}{=} \ldots - \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\int_{S^1\times\Sigma} (g^{-1} \underbrace{d_{tot}}_{d_t + d_\Sigma} g)^3 = \int_{S^1\times\Sigma} - g^*(2\pi\,\theta) \in 2\pi\cdot\mathbb{Z}$$

в силу целочисленности θ ☐

Следствие: Связность $\tilde\nabla$ - д/нее в трив. $U(1)$-рассл. над $\mathrm{FlatConn}_\Sigma$ с 1-формой α имеет тривиальные голономии вдоль калибр. преобразований

• Поэтому можно отождествить слои $U(1)$-слоя над орбитами $\mathrm{Gauge}_\Sigma\, G\ \mathrm{FlatConn}_\Sigma$

$\longrightarrow$ $U(1)$-расслоение $\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ \mathrm{FlatConn}/_{\mathrm{Gauge}} = \mathcal{M}(\Sigma, G) \end{array}$, связность $\tilde\nabla$ спускается в связность ∇ на L

• $\pi^* F_\nabla = F_{\tilde\nabla} = 2\pi\,\omega \Rightarrow F_\nabla = 2\pi\cdot\underline{\omega}$

• по т. Черна-Вейля, $\left[\frac{1}{2\pi} F_\nabla\right] = c_1(L) \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ - целочисленный класс

$\Rightarrow$ $\boxed{[\underline{\omega}] \text{ - целочисленный класс на } \mathcal{M}}$

Примечание: можно начинать с симпл. стр-ры $k\cdot\omega$ на Conn_Σ, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ "уровень" в терминологии CS.

Тогда $\underline{\omega} \mapsto k\cdot\underline{\omega}$ на $\mathcal{M}$ и $(L, \nabla) \mapsto (L^{\otimes k}, k\cdot\nabla)$

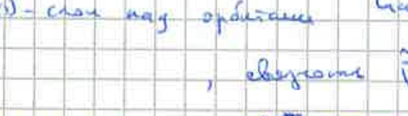
$\begin{array}{c}\downarrow \\ \mathcal{M}\end{array}$

по отклонению, $L^{-1} := L^*$

Случай поверхности с границей:

не задаёт точки $\partial\Sigma$

Этап 1: $\mathrm{Gauge}_{\Sigma,\partial\Sigma}\, G\ \mathrm{Conn}_\Sigma \xrightarrow{\text{curv}} \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$



$[j_1]$ - - - $[j_n]$ - фиксированные классы в G/G

$\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{Conn}_\Sigma /\!/ \mathrm{Gauge}_{\Sigma,\partial\Sigma}$ - бесконечномер. симпл. многообр.

Этап 2: $\underbrace{LG^{\times n}}_{\mathrm{Gauge}_{\partial\Sigma}}\ G\ \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow[\text{ограничение связности на } \partial\Sigma]{\mu} \Omega^1(\partial\Sigma, \mathfrak{g}) \sim (L\mathfrak{g}^{\times n})^*$

$[j_1] - [j_n]$ задают набор $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_n$ коприс. орбит для LG

$$\mathcal{M}_{\Sigma, [j_1] - [j_n]} = \tilde{\mathcal{M}} /\!/_{\mathcal{O}_1\times\ldots\times\mathcal{O}_n} LG^{\times n} := \mu^{-1}(\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n) / LG^{\times n}$$

целочисленность $\omega \Leftrightarrow$ нек. ограничение на классы $[j_1] - [j_n]$

(2/5)
(3/1)
31.05.13

~~Теория Черна-Саймонса:~~

G – компактная, простая гр. Ли

M – ориентированное компактное 3-мн-е

$Conn_M \simeq \Omega^1(M,\mathfrak{g})$ – пр-во полей,

$S_{CS}: A \longmapsto \frac{1}{4\pi} tr \int_M \frac{1}{2} A\wedge dA + \frac{1}{3} A\wedge A\wedge A$ – действие

• ~~Если~~ $\partial M = \varnothing \Rightarrow$ ур. крит. точки $\delta S = 0 \Leftrightarrow F_A = 0$ $(*)$ "ур. движения"

• калибр. преобразование $A \longmapsto A^g$, $g \in Gauge_M$

$$S(A) \mapsto S(A^g) = S(A) - \underbrace{\frac{1}{12\pi} tr \int_M (g^{-1}dg)^3}_{2\pi (g^*[\theta], [M]) \in 2\pi\mathbb{Z}}$$

Т.о. $S: Conn_M/_{Gauge_M} \to \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$

для $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, "уровень" $e^{ikS}: Conn_M/_{Gauge_M} \to U(1)$ – инвариант Черна-Саймонса

$(*) \Rightarrow e^{ikS}$ локально-постоянна на $FlatConn_M \Rightarrow$ ~~$e^{ikS} \in H_0(M, \ldots)$~~

$\boxed{e^{ikS} \in H^0(\mathcal{M}(M,G), U(1))}$ – лок.-пост. функция на пр-ве модулей

Если $\partial M \neq \varnothing$, то $Conn_{\partial M}$ – "фазовое пространство" для границы

$\alpha = \frac{1}{2\pi} tr \int_M A\wedge \delta A \in \Omega^1(Conn_{\partial M})$ – граничный член вариации δS

$\omega = \delta\alpha$ – симпл. форма на $Conn_{\partial M}$

$Conn_{\partial M} \supset FlatConn_{\partial M}$ – "пр-во связей" – связи, продолжающиеся как плоские в окрестность ∂M в M.

~~оно~~ коизотропно и хар. распределение = калибр. преобр. $Gauge_{\partial M}$

редуцированное фазовое пр-во: $\left(FlatConn_{\partial M}/_{Gauge_{\partial M}}, \omega\right)$ – пр-во модулей на ∂M с формой Атьи-Ботта.

$\qquad\qquad = \mathcal{M}(\partial M, G)$

Claim: образ $\mathcal{M}(M,G) \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}(\partial M, G)$ лагранжев.

Случай $G=\mathbb{R}$: $H^1(M) \xrightarrow{\pi} H^1(\partial M)$ обозначим $L = im\,\pi$

ω: двойств. Пуанкаре

изотропность: $(\pi[\alpha], \pi[\beta]) = \int_{\partial M} \alpha|_{\partial M} \wedge \beta|_{\partial M} = \int_M d(\alpha\wedge\beta) = 0$, $\alpha,\beta \in \Omega^1_{closed}(M)$

коизотропность: Вычислим $L^\perp = \{[a] \in H^1(\partial) \mid \forall [\beta] \in H^1(M), (\pi[\beta],[a]) = 0\}$ $(=)$

$H^1(M) \xrightarrow{\pi} H^1(\partial M) \xrightarrow{c} H^2(M,\partial M)$

$\int_{\partial M} a \wedge \beta|_{\partial M} = \int_M d\tilde{a}\wedge\beta = (c[a],[\beta])_{Lefschetz}$, $\tilde{a}$ – какое-нибудь продолжение a в M

$(=)$ $\{[a] \in H^1(\partial) \mid c[a] = 0\} = \ker c = im\,\pi = L$.

в силу невыр.

(2/6)
(3/2)

что становится с инвариантом Ч-С в присутствии границы?

$\delta S = \frac{k}{2\pi} tr \int_M F_A \wedge \delta A + p^* \alpha$, в частности $\delta S|_{FlatConn_M} = p^* \alpha$ ...

$p: Conn_M \twoheadrightarrow Conn_{\partial M}$

$\pi = p_* : \mathcal{M}_M \to \mathcal{M}_{\partial M}$

$\underbrace{(\delta - ikp^*\alpha)}_{p^* \tilde{\nabla}_k} e^{ikS} = 0$ на $FlatConn_M$

$\to e^{ikS}$ спускается на $\mathcal{M}(M,G)$ и даёт глобальное горизонтальное сечение

$U(1)$-расслоение $\pi^* \mathcal{L}^{\otimes k}$

$\downarrow$

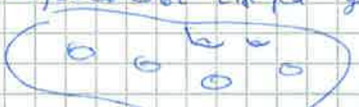
$\mathcal{M}(M,G)$

В частности, $\mathcal{L}^{\otimes k}|_{L=\mathcal{M}(\partial M,G)}$ тривиально

(в два хода:
$$\begin{array}{ccccc} \text{трив. расс.} & & \text{трив.} & & \pi^*\mathcal{L}^{\otimes k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ FlatConn(M) & \to & FlatConn_M/Gauge_{M,\partial M} & \to & \mathcal{M}_M /Gauge_{\partial M} \end{array}$$
)

---

* Пуассонова стр-ра для поверхности с границей (не фиксируем голономии на границе)



$T_\nabla \mathcal{M}(\Sigma,G) = H^1_{d_A}$

$$\to H^0_\nabla(\partial\Sigma) \to H^1_\nabla(\Sigma,\partial\Sigma) \xrightarrow{\rho} H^1_\nabla(\Sigma) \xrightarrow{\pi} H^1_{\nabla|_\partial}(\partial\Sigma) \to H^2_\nabla(\Sigma,\partial\Sigma) \to \dots$$

$\langle , \rangle_{Lefschetz}: H^1(\Sigma,\partial\Sigma) \otimes H^1(\Sigma) \to \mathbb{R}$ - невыр

$\Rightarrow$ спаривание на отн. когомологиях (вырожд.) $([\alpha],[\beta]) = \langle [\alpha], \rho[\beta] \rangle$, $(,) \in \Lambda^2(H^1(\Sigma,\partial\Sigma))^*$

$\alpha, \beta \in \Omega^1_{closed}(\Sigma,\partial\Sigma)$

даёт бивектор $\Pi \in \Lambda^2 H^1(\Sigma)$

Π задаёт отобр $H^1(\Sigma)^* \xrightarrow{\Pi^\#} H^1(\Sigma)$, т.о. $im\,\Pi^\# = im\,\rho = ker\,\pi$

 $\cong \langle\rangle$ $H^1(\Sigma,\partial\Sigma) \nearrow_\rho$

т.е. касат. пр-во к симплектическому листу Π ч/з ∇ - это $ker\,\pi_\nabla$

?

глобально: $\mathcal{M}(\Sigma,G)$, Π - пуассонов бивектор

$\downarrow \pi$

$\mathcal{M}(\partial\Sigma,G) \simeq (G/G)^{\times n}$

симпл. листы Π = слои π.

Квантовая теория Черна-Саймонса

Виттен '89:

G — простая, компактная, 1-связ.

Хочется: построить инвариант 3-многообразий $Z(M) = \int_{Conn(M)} "\mathcal{D}A" \, e^{ikS(A)}$

M — связное ориентир. 3-многообр.

крит. точки не изолированы (вследствие Gauge(M)-симметрии)
(плоские связн.)

$$\rightsquigarrow Z(M,k) = \int_{Conn(M)/Gauge(M)} "\mathcal{D}[A]" \, e^{ikS(A)}$$

— здесь крит. точки соответствуют $\mathcal{M}(M,G)$

В пределе асимптотике $k \to \infty$, $\int$ формально определяется с помощью ф-лы стац. фазы (+ Фаддеев-Попов для фактора по Gauge(M))

Предположим, что $\mathcal{M} = \{[A_i]\}$ — конечный набор точек (напр., гомол. сфера).

$$Z(M,k) \underset{k\to\infty}{\sim} \sum_{[A_i]} e^{ikS(A_i)} \cdot \int_{\Omega^1(M,\mathfrak{g}) \oplus \Omega^3(M,\mathfrak{g}) \oplus \Pi\Omega^0(M,\mathfrak{g}) \oplus \Pi\Omega^0(M,\mathfrak{g})} \mathcal{D}a\, \mathcal{D}\lambda\, \mathcal{D}c\, \mathcal{D}\bar{c} \cdot e^{\frac{ik}{2\pi}\int_M \frac{1}{2} a \wedge d_{A_i} a + \lambda \wedge d^*_{A_i} a + *\bar{c} \wedge \Delta_{A_i} c \left(+\frac{1}{3}a^3\right)} =$$

используем какую-то метрику g на M.

$$= \sum_{[A_i]} e^{ikS(A_i)} \left(\frac{\det_{\Omega^0(M,\mathfrak{g})} \Delta_{A_i}}{\left|\det_{\Omega^{odd}(M,\mathfrak{g})} k(\underbrace{*d_{A_i} + d_{A_i}*}_{L_-})\right|^{1/2}} \right) (*) \cdot e^{\frac{\pi i}{4}\underbrace{\eta(A_i, g)}_{\lim_{s\to 0} \sum_{\lambda\text{-спектр } L_-} \mathrm{sign}(\lambda)\cdot|\lambda|^{-s}}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right)$$

Теорема Атьи-Патоди-Зингера:

① $\frac{\pi}{4}\left(\eta(A_i, g) - \eta(0, g)\right) = \underbrace{h}_{\text{двойств. число Коксетера } \mathfrak{g}} \cdot S(A_i)$
($h = N$ для $SU(N)$)

② $\frac{\pi}{4}\eta(0,g) + \frac{1}{24} S_{grav}(\nabla_{LC}, s)$ не зависит от метрики g

∇_{LC} — связность Леви-Чивита в спин-рассл. построенная по g; s — "оснащение" M

Примечание:
$S_{grav}(\nabla_{LC}, s+n) = S_{grav}(\nabla_{LC}, s) + 2\pi n$
сдвиг фрейминга

• отношение детерминантов $(*)$
= (кручение Рэя-Зингера)$^{1/2}$

$$T(M, A_i) := \prod_{j=0}^{3} \left(\det_{\Omega^j(M,\mathfrak{g})} \Delta_{A_i}\right)^{-\frac{(-1)^j j}{2}}$$

— не зав. от метрики g.

Т.о.

$$\tilde{Z}(M, s; k) = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\eta(0,g) + \frac{1}{24}S_{grav}(g,s)\right)} \cdot \sum_{[A_i]} e^{i(k+h)S(A_i)} \cdot T(M, A_i)^{1/2} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right)$$

$\tilde{Z}$ — с компенсированной зав-стью фазы от g

— инвариант оснащённых многообразий.

Объём $\mathcal{M}(\Sigma, G)$, когда G — конечная группа.

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{M}(M, G) = \frac{1}{|G|}\#\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G) = \sum_{\rho \in \mathrm{Hom}/G} \frac{1}{|\mathrm{Stab}_\rho|}$$

- ρ ? · $\mathcal{M}$ как группоид.

(n+1)-мерные

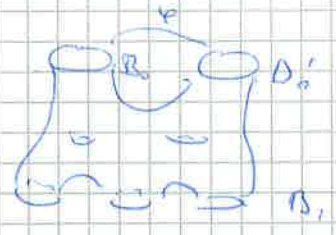
Отступление: ТКТП по Атье

данные:

- замкнутое n-многообр. B ⟶ вект. простр-во $\mathcal{H}_B$, $\langle\,,\rangle$ $\in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$
- (n+1)-мн. M с границей ∂M ⟶ вектор $Z_M \in \mathcal{H}_{\partial M}$
- действие группы классов отображений [проективное] (диффеоморфизмов) $\rho_B : MCG(B) \longrightarrow U(\mathcal{H}_B)$

аксиомы:

- мультипликативность $\mathcal{H}_{B_1 \sqcup B_2} = \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2}$, $Z_{M_1 \sqcup M_2} = Z_{M_1} \otimes Z_{M_2} \in \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2}$
- склейка: если $\partial M = B_0 \sqcup B_0' \sqcup B_1$ и $\varphi : B_0 \sim B_0'$, то $\tilde{M} = M/\varphi$ — склеенное многообразие



$$\mathcal{H}_{\partial M} = \mathcal{H}_{B_0} \otimes \mathcal{H}_{B_0'} \otimes \mathcal{H}_{B_1}$$
$$\downarrow \rho(\varphi^{-1})$$
$$\mathcal{H}_{B_0} \otimes \mathcal{H}_{B_0} \otimes \mathcal{H}_{B_1}$$
$$\langle\,,\rangle \otimes id$$
$$\downarrow$$
$$\xrightarrow{\psi} \mathcal{H}_{B_1} = \mathcal{H}_{\partial \tilde{M}}$$

$$Z_{\tilde{M}} = \psi(Z_M)$$

- действие диффеоморфизмов: $M \xrightarrow[\sim]{\varphi} M'$

$$Z_{M'} = \rho(\varphi)_{\partial M} \cdot Z_M$$

- $\mathcal{H}_{\emptyset} = \mathbb{C}$, $Z_{B \times [0,1]} = id_{\mathcal{H}_B} \in \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B^* \underset{id \otimes \langle,\rangle^{-1}}{\simeq} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B$

Прим.: · где $\partial M = \emptyset$, $Z_M \in \mathbb{C}$ — дифф. инвариант
· где $M = S^1 \times B$, $Z_M = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B} id = \dim \mathcal{H}_B \in \mathbb{N}$.

Объём $\mathrm{Vol}\,\mathcal{M}(M, G)$ как продолжается до ТКТП: (для любого $n-1 \geq 1$)

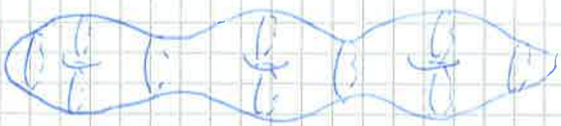
$$\mathcal{H}_B := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{M}(B, G), \quad \langle [\alpha] \mid [\beta] \rangle_{[\alpha],[\beta] \in \mathcal{M}(B,G)} = \begin{cases} |\mathrm{Stab}_\alpha^G| = \frac{|G|}{|\mathrm{Orbit}_\alpha|} & \text{если } [\alpha] = [\beta] \\ 0 & \text{если } [\alpha] \neq [\beta] \end{cases}$$

$$Z_\Sigma := \sum_{[\alpha] \in \mathcal{M}(\partial M, G)} \frac{1}{|G|} \#\{a : \pi_1(M) \xrightarrow[\text{homo}]{} G \mid [a|_{\partial M}] = [\alpha]\} \cdot |[\alpha]\rangle$$

рассм. случай поверхностей: $M=\Sigma$, $\dim = 2$ (3/3)

$\mathcal{H}_{S^1} = \cancel{\otimes} \ \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(G/_G)$ $\quad$ $\langle [a] | [b] \rangle = \begin{cases} |\mathrm{Stab}_{[a]}| & \text{если } [a]=[b] \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$

Поверхность можно разрезать на диски и пары штанов.



$Z_{\text{disk}} = \frac{1}{|G|} |[1]\rangle$

поэтому, напр. $Z_{S^2} = \frac{1}{|G|^2} \langle [1] | [1] \rangle = \frac{1}{|G|}$

$$Z_{\text{pants}} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{a,b,c \in G \\ a\cdot b \cdot c = 1}} |[a]\rangle \otimes |[b]\rangle \otimes |[c]\rangle$$

В $\mathcal{H}^*_{S^1}$ есть другой естественный базис – характеры неприв. предст. G, $\chi_{R_i} : G/_G \to \mathbb{C}$

$\langle R | [a] \rangle := \chi_R(a)$

с помощью скал. произведения, можем построить базис $|R\rangle$ на $\mathcal{H}_{S^1}$:

$|[a]\rangle = \sum_R \chi_R(a) |R\rangle$

~~$|R\rangle = \sum_{[a]\in G/_G} |\mathrm{Stab}_a| \chi_R(a^{-1}) |[a]\rangle$~~

соотн. ортог. Ш.

$$|R\rangle = \sum_{[a]\in G/_G} \frac{|\mathrm{Stab}_a|}{|G|} \chi_R(a^{-1}) |[a]\rangle$$

$\frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_a|}$ $\quad$ $\frac{|\mathrm{Stab}_a|}{|G|} = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_a|}$

$\langle R | R' \rangle = \delta_{RR'}$

Соотношения ортогональности Шура

- $\sum_{a\in G} \chi_{R_1}(ba) \chi_{R_2}(a^{-1}c) = \delta_{R_1 R_2} \frac{\chi_{R_1}(bc)}{\dim R_1} \cdot |G|$

в частн., $\sum_{a\in G} \chi_R(a) \chi_{R'}(a^{-1}) = |G| \delta_{RR'}$

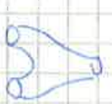
- $\sum_R \chi_R(a)\chi_R(b^{-1}) = \begin{cases} |\mathrm{Stab}_a|, & \text{если } [a]=[b] \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$

- $\sum_{a\in G} \chi_R(aba^{-1}c) = |G| \frac{\chi_R(b)\chi_R(c)}{\dim R}$

$\frac{1}{|G|} \sum_{a,d} \chi_R(abd) \chi_R(d^{-1}a^{-1}a)$ $\quad$ $\begin{cases} \text{lhs} \propto \chi_R(c) \text{ по ортог. с } \chi_{R'} \\ b \text{ fixed} \\ \text{при } c=1 \\ \text{lhs} = |G| \chi(b) \end{cases}$

В терминах нового базиса:

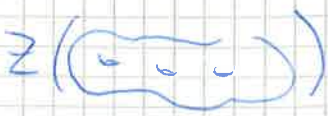
$$Z_{\text{disk}} = \frac{1}{|G|} \sum_R \dim R \cdot |R\rangle$$



$$Z_{\text{pants}} = \frac{1}{|G|} \sum_{R_1,R_2,R_3} \left(\underbrace{\sum_{a,b\in G} \chi_{R_1}(a) \chi_{R_2}(b) \chi_{R_3}(\underbrace{b^{-1}a^{-1}}_{c})} \right) |R_1\rangle \otimes |R_2\rangle \otimes |R_3\rangle =$$

$$\sum_a \chi_{R_1}(a) \delta_{R_2 R_3} \frac{\chi_{R_2}(a^{-1})}{\dim R_2} |G| = \frac{|G|^2}{\dim R_1} \delta_{R_1 R_2 R_3}$$

$$= |G| \sum_R \frac{|R\rangle \otimes |R\rangle \otimes |R\rangle}{\dim R}$$



$$\Rightarrow Z(\Sigma_g) = \sum_R \left(\frac{|G|}{\dim R} \right)^{\#\text{пар штанов} - \#\text{дисков}} = \boxed{\sum_R \left(\frac{|G|}{\dim R} \right)^{2g-2}}$$

Witten "On quantum gauge theories in two dimensions" 1991

- Симплектический объём $\mathcal{M}(\Sigma, G)$, когда G – гр. Ли:

род ≥ 2

G – связная, компактная — ω нормирована как целочисленная 2-форма $\omega_{\text{цел}} = \frac{\omega_{std}}{2\pi}$

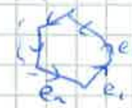
$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \frac{\omega^{\frac{1}{2}\dim\mathcal{M}}}{\left(\frac{1}{2}\dim\mathcal{M}\right)!} \underset{\text{Виттен}}{=} \frac{\# Z(G)\cdot \mathrm{Vol}(G)^{2g-2}}{(2\pi)^{\dim\mathcal{M}}} \sum_R \frac{1}{(\dim R)^{2g-2}}$$

например, для $G = SU(2)$, $$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) = \underbrace{\frac{2\cdot(2^{3/2}\pi^2)^{2g-2}}{(2\pi)^{6g-6}}}_{\frac{2}{(2\pi^2)^{g-1}}} \cdot \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2g-2}}}_{\zeta(2g-2)}$$

Вычисление
- через ф-лу Майера–Виеториса для нарезаний Рёш-Зингера / Райдемайстера
- через 2D Янг–Миллс, в пределе $e^2 \to 0$
→ комбин. версия: T – разбиение Σ

$$\mathrm{Vol} \propto \int_{G^{\#\text{рёбра}(T)}} \prod_e dU_e \prod_{\text{2-клетки}} \delta(U_{e_n} \cdots U_{e_1}, 1)$$

мера Хаара



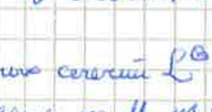
- связь с кв. Черн–Саймонсом:

$$\mathcal{H}_\Sigma^{CS_k} = (\text{пр-во Верлинде}) = H^0_{\bar\partial_A}(\mathcal{M}, \mathcal{L}^{\otimes k})$$

пр-во голоморфных сечений $\mathcal{L}^{\otimes k}$
компл. стр. $\bar\partial$ спускается на $\mathcal{M}$ из $\mathbb{C}\otimes T_A \mathrm{Conn}_\Sigma = \Omega^{1,0}(\Sigma, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^{0,1}(\Sigma, \mathfrak{g})$
с пом. симплектической редукции

$\mathcal{H}_\Sigma^{CS_k}$ – конечномерное пространство (G – компактна)

Верлинде:
для $G = SU(2)$ $\dim \mathcal{H}_{\Sigma_g}^{CS_k}$ = число способов раскрасить рёбра 3-вал. графа с g петлями числами $j_q \in \{0, 1, \dots, k\}$
т.что в каждой вершине j_1, j_2, j_3:



- $j_1 + j_2 + j_3 \in 2\cdot\mathbb{Z}$
- $j_1 + j_2 + j_3 \leq 2k$
- $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$

$$= \boxed{\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi(j+1)}{k+2}\right)^{2g-2}}}$$

– это целое число! $\forall k \in \mathbb{N}$ (тело для всех родов $g = 0, 1, 2, \dots$) и полином по k степени $3g-3$ при $g \geq 2$

$$\dim H^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}^{\otimes k}) \underset{\text{Kodaira vanishing}}{=} \chi(\mathcal{M}, \mathcal{L}^{\otimes k}) \underset{\text{Риман-Рох-Хирцебрух}}{=} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{td}(\mathcal{M}) \cdot e^{\frac{k\omega}{2\pi}} \;(=)$$

td – класс Тодда касат. рассл. $= \prod_{\text{Chern roots } \alpha_i \in H^2(\mathcal{M})} \frac{\alpha_i}{e^{\alpha_i} - 1}$ – из принципа расщепления.

$$(=) \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{\dim\mathcal{M}}{2}} \cdot \mathrm{Vol}(\mathcal{M}) + \text{поправки по } \frac{1}{k}.$$

$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ извлекается из асимптотики ф-лы Верлинде.

напр., $g = 2$; $SU(2)$: