
MÉMOIRE

SUR LA

PUISSANCE MOTRICE DE LA CHALEUR,

PAR E. CLAPEYRON,

INGÉNIEUR DES MINES.

§ I.

Il est peu de questions plus dignes de fixer l'attention des géomètres et des physiciens, que celles qui se rapportent à la constitution des gaz et des vapeurs; le rôle qu'ils jouent dans la nature et le parti qu'en tire l'industrie, expliquent les nombreux et importants travaux dont ils ont été l'objet; mais cette vaste question est loin d'être épuisée. La loi de Mariotte et celle de M. Gay-Lussac établissent les relations qui existent entre le volume, la pression et la température d'une même quantité de gaz; toutes deux ont obtenu depuis long-temps l'assentiment des savans. Les expériences nouvelles faites par MM. Arago et Dulong ne laissent plus aucun doute sur l'exactitude de la première entre des limites très étendues de la pression; mais ces résultats importants n'apprennent rien sur la quantité de chaleur que possèdent les gaz, et qu'en dégagent la pression ou un abaissement de température, ils ne donnent pas la loi des caloriques spécifiques à pression cons-

tante et à volume constant. Cette partie de la théorie de la chaleur a pourtant été l'objet de recherches approfondies, parmi lesquelles on remarque le travail de MM. Laroche et Bérard sur le calorique spécifique des gaz. Enfin, M. Dulong, dans un Mémoire qu'il a publié sous le titre de *Recherches sur la Chaleur spécifique des fluides élastiques*, a établi par des expériences à l'abri de toute objection, que *des volumes égaux de tous les fluides élastiques pris à une même température et sous une même pression, étant comprimés ou dilatés subitement d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité absolue de chaleur.*

Laplace, et plus tard M. Poisson, ont publié sur ce sujet des recherches théoriques très remarquables, mais qui reposent sur des données hypothétiques qui paraissent contestables; ils admettent que le rapport du calorique spécifique à volume constant au calorique spécifique à pression constante ne varie pas, et que les quantités de chaleur absorbées par les gaz sont proportionnelles à leur température.

Je citerai enfin parmi les travaux qui ont paru sur la théorie de la chaleur, un ouvrage de M. S. Carnot, publié en 1824, sous le titre de *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. L'idée qui sert de base à ses recherches me paraît féconde et incontestable, ses démonstrations sont fondées sur l'absurdité qu'il y aurait à admettre la possibilité de créer de toutes pièces de la force motrice ou de la chaleur. Voici l'énoncé de plusieurs théorèmes auxquels le conduit cette méthode nouvelle de raisonnement.

1°. *Lorsqu'un gaz passe, sans changer de température, d'un volume et d'une pression déterminés, à un autre volume et à une autre pression également déterminés, la quantité de calorique absorbée ou abandonnée est toujours la même, quelle que soit la nature du gaz choisi comme sujet d'expérience.*

2°. *La différence entre la chaleur spécifique sous pression constante, et la chaleur spécifique sous volume constant, est la même pour tous les gaz.*

3°. *Lorsqu'un gaz varie de volume sans changer de température,*

les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par ce gaz sont en progression arithmétique, si les accroissemens ou réductions de volume sont en progression géométrique.

Ce nouveau moyen de démonstration me paraît digne de fixer l'attention des géomètres ; il me semble à l'abri de toute objection, et acquiert une nouvelle importance depuis la vérification qu'il trouve dans les travaux de M. Dulong, qui a démontré par l'expérience le premier théorème dont je viens de rappeler l'énoncé.

Je crois qu'il est de quelque intérêt de reprendre cette théorie ; M. S. Carnot, évitant l'emploi de l'analyse mathématique, arrive par une série de raisonnemens délicats et difficiles à saisir, à des résultats qui se déduisent sans peine d'une loi plus générale, que je vais chercher à établir. Mais avant d'entrer en matière, il est utile de revenir sur l'axiome fondamental qui sert de base aux recherches de M. Carnot, et qui sera aussi mon point de départ.

§ II.

On a remarqué depuis long-temps que l'on peut employer la chaleur à développer de la force motrice, et réciproquement, qu'avec de la force motrice on peut développer de la chaleur. Dans le premier cas, on doit observer qu'il y a toujours passage d'une quantité déterminée de calorique d'un corps d'une température donnée à un corps d'une température inférieure ; ainsi, dans les machines à vapeur, la production de force mécanique est accompagnée du passage d'une partie de la chaleur que la combustion développe dans le foyer, dont la température est très élevée, à l'eau du condenseur, dont la température est beaucoup moindre.

Réciproquement, il est toujours possible d'utiliser le passage du calorique d'un corps chaud à un corps froid pour la production d'une force mécanique : il suffit pour cela de construire un appareil semblable à celui des machines à vapeur ordinaires, dans lequel le corps

chaud serve à développer la vapeur, et le corps froid à la condenser.

Il résulte de là qu'il y a perte de force vive, de force mécanique ou de quantité d'action, toutes les fois qu'il y a contact immédiat entre deux corps de température différente, et que la chaleur passe de l'un à l'autre sans intermédiaire; donc enfin, dans tout appareil destiné à réaliser la force motrice que développe la chaleur, il y a perte de force toutes les fois qu'il y a communication directe de chaleur entre corps de température différente, et par suite, l'effet produit *maximum* ne pourrait être réalisé que par un appareil dans lequel il ne s'établirait de contact qu'entre corps de température égale.

Or, ce que nous connaissons de la théorie des gaz et des vapeurs montre la possibilité d'atteindre ce but.

Imaginons en effet deux corps entretenus, l'un à une température T , l'autre à une température inférieure t , tels par exemple que les parois d'une chaudière à vapeur, dans laquelle la chaleur développée par la combustion remplace sans cesse celle qu'emporte avec elle la vapeur qui se dégage; et le condenseur d'une machine à feu ordinaire, dans lequel un courant d'eau froide enlève à chaque instant la chaleur que dégage la vapeur en se condensant, et celle qui est due à sa température propre. Nous nommerons pour plus de simplicité le premier corps A , et le second B .

Cela posé, prenons un gaz quelconque à la température T , et mettons-le en contact avec la source de chaleur A ; représentons son volume v_0 par l'abscisse AB , et sa pression par l'ordonnée CB (fig. 1).

Si le gaz est renfermé dans un vase extensible, et qu'on le laisse se détendre dans un espace vide où il ne perde pas de chaleur par rayonnement ni par contact, la source de chaleur A lui fournira à chaque instant la quantité de calorique que son augmentation de volume rend latente, et il conservera la même température T . Sa pression, au contraire diminuera suivant la loi de Mariotte. La loi de cette variation peut être représentée géométriquement par une courbe CE dont les volumes seraient les abscisses, et les pressions correspondantes seraient les ordonnées.

Supposons que la dilatation du gaz soit continuée jusqu'à ce que le volume primitif AB soit devenu AD ; et soit DE la pression correspondante à ce nouveau volume; le gaz, pendant sa dilatation, aura développé une quantité d'action mécanique qui aura pour valeur l'intégrale du produit de la pression, par la différentielle du volume, et qui sera représentée géométriquement par la surface comprise entre l'axe des abscisses, les deux coordonnées CB , DE , et la portion d'hyperbole CE .

Supposons maintenant qu'on écarte le corps A , et que la dilatation du gaz se continue dans une enveloppe imperméable à la chaleur; alors une partie de son calorique sensible devenant latente, sa température diminuera, et sa pression continuera de décroître d'une manière plus rapide et suivant une loi inconnue, qui pourra être représentée géométriquement par une courbe EF dont les abscisses seraient les volumes du gaz, et les ordonnées les pressions correspondantes; nous supposons que la dilatation du gaz soit continuée jusqu'à ce que les réductions successives qu'éprouve le calorique sensible du gaz l'aient ramené de la température T du corps A à la température t du corps B . Son volume sera alors AG , et la pression correspondante sera FG .

On verra de même que le gaz, pendant cette seconde partie de sa dilatation, développera une quantité d'action mécanique représentée par la surface du trapèze mixtiligne $DEFG$.

Maintenant que le gaz est amené à la température t du corps B , mettons-les en présence; si l'on comprime le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, mais en contact avec le corps B , la température du gaz tendra à s'élever par le dégagement du calorique latent rendu sensible par la compression, mais il sera absorbé à mesure par le corps B , en sorte que la température du gaz restera égale à t . Par suite, la pression croîtra suivant la loi de Mariotte; elle sera représentée géométriquement par les ordonnées d'une hyperbole KF , et les abscisses correspondantes représenteront les volumes. Supposons que la compression soit poussée jusqu'à ce que la chaleur dégagée par la compression du gaz et absorbée par le corps B , soit précisément égale

à la chaleur communiquée par la source A au gaz, pendant sa dilatation en contact avec elle lors de la première partie de l'opération. Soit alors AH le volume du gaz, et HK la pression correspondante. Le gaz dans cet état possède la même quantité absolue de chaleur qu'au moment où l'on a commencé l'opération, quand il occupait le volume AB sous la pression CB. Si donc on écarte le corps B et que l'on continue à comprimer le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur jusqu'à ce que le volume AH soit ramené au volume AB, sa température s'accroîtra successivement par le dégagement du calorique latent que la compression rend sensible. La pression augmentera également, et lorsque le volume sera réduit à AB, la température redeviendra T, et la pression BC. En effet, les états successifs dans lesquels un même poids de gaz peut se trouver sont caractérisés par le volume, la pression, la température et la quantité absolue de calorique qu'il renferme; de ces quatre quantités, deux étant connues, les deux autres en sont des conséquences; ainsi, dans le cas dont il s'agit, la quantité absolue de chaleur et le volume étant redevenus ce qu'ils étaient au commencement de l'opération, on peut être certain que la température et la pression seront aussi ce qu'elles étaient alors. Conséquemment, la loi inconnue suivant laquelle variera la pression lorsque l'on réduira le volume du gaz dans son enveloppe imperméable à la chaleur, sera représentée par une courbe KC qui passera par le point C, et dans laquelle les abscisses représentent toujours les volumes, et les ordonnées les pressions.

Cependant, la réduction du volume gazeux de AG à AB aura consommé une quantité d'action mécanique qui sera, par les mêmes motifs que nous avons exposés plus haut, représentée par les deux trapèzes mixtilignes FGHK et KHBC. Si nous retranchons ces deux trapèzes des deux premiers CBDE et EDGF, qui représentent la quantité d'action développée pendant la dilatation du gaz, la différence, qui sera égale à l'espèce de parallélogramme curviligne CEFK, représentera la quantité d'action développée dans le cercle d'opérations que nous venons de décrire, et à la suite desquelles le gaz

se retrouvera précisément dans l'état où il était primitivement.

Cependant, toute la quantité de chaleur fournie par le corps A au gaz pendant qu'il s'est dilaté en contact avec lui, s'est écoulée dans le corps B pendant la condensation du gaz qui s'est opérée en contact avec celui-ci.

Voilà donc de la force mécanique développée par le passage du calorique d'un corps chaud à un corps froid, et ce passage s'est effectué sans qu'il y ait eu contact entre corps de température différente.

L'opération inverse est également possible; ainsi, prenons le même volume de gaz AB à la température T et sous la pression BC; renfermons-le dans une enveloppe imperméable à la chaleur, et dilatons-le jusqu'à ce que sa température diminuant graduellement devienne égale à t ; continuons la dilatation dans la même enveloppe, mais après avoir introduit le corps B qui a la même température; celui-ci fournira au gaz la chaleur nécessaire pour maintenir sa température, et nous pousserons l'opération jusqu'à ce que le corps B ait rendu au gaz la chaleur qu'il en avait reçue dans l'opération précédente. Écartons ensuite le corps B, et condensons le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, jusqu'à ce que sa température redevienne égale à T. Alors approchons le corps A qui possède la même température, et continuons la réduction de volume jusqu'à ce que toute la chaleur prise au corps B soit rendue au corps A. Le gaz se trouve alors avoir la même température et posséder la même quantité absolue de chaleur qu'au commencement de l'opération; on en peut conclure qu'il occupe le même volume et est soumis à la même pression.

Ici le gaz passe successivement, mais dans un ordre inverse, par tous les états de température et de pression par lesquels il avait passé dans la première série d'opérations; conséquemment les dilatations sont devenues des compressions, et réciproquement, mais elles suivent la même loi. Par suite, les quantités d'action développées dans le premier cas sont absorbées dans le second, et réciproquement, mais elles conservent les mêmes valeurs numériques, car les éléments des intégrales qui les composent sont les mêmes.

On voit ainsi qu'en faisant passer de la chaleur, par la méthode que nous avons d'abord indiquée, d'un corps entretenu à une température déterminée à un corps entretenu à une température inférieure, on développe une certaine quantité d'action mécanique, laquelle est égale à celle qu'il faut consommer pour faire passer la même quantité de chaleur du corps froid au corps chaud, par le procédé inverse dont nous avons parlé en dernier lieu.

On peut arriver à un résultat semblable par la réduction en vapeur d'un liquide quelconque. Prenons en effet ce liquide et mettons-le en contact avec le corps A dans une enveloppe extensible et imperméable à la chaleur; nous supposons que la température du liquide soit égale à la température T du corps A. Portons sur l'axe des abscisses AX (fig. 2), une quantité AB égale au volume du liquide, et sur une ligne parallèle à l'axe des ordonnées AY une quantité BC égale à la pression de la vapeur du liquide qui correspond à la température T.

Si nous augmentons le volume du liquide, une portion de celui-ci passera à l'état de vapeur, et comme la source de chaleur A fournit le calorique latent nécessaire à sa formation, la température restera constante et égale à T. Alors, si l'on porte sur l'axe des abscisses des quantités représentant les volumes successifs qu'occupe le mélange de liquide et de vapeur, et que l'on prenne pour ordonnées les valeurs correspondantes de la pression, comme celle-ci reste constante, la courbe des pressions se réduira ici à une ligne droite CE parallèle à l'axe des abscisses.

Lorsqu'une certaine quantité de vapeur a été formée et que le mélange de liquide et de vapeur occupe un volume AD, on peut écarter le corps A, et continuer la dilatation. Alors une nouvelle quantité de liquide passera à l'état gazeux, et une partie du calorique sensible devenant latente, la température du mélange diminuera ainsi que la pression; supposons que l'on pousse la dilatation jusqu'à ce que la température diminuant graduellement devienne égale à la température t du corps B; soit AF le volume, et FG la pression qui y correspondent. La loi de la variation de la pression sera donnée par

une courbe EG qui passera par le point E et le point G .

Pendant cette première partie de l'opération que nous décrivons, on aura développé une quantité d'action représentée par la surface du rectangle $BCED$, et celle du trapèze mixtiligne $EGFD$.

Maintenant, approchons le corps B , mettons-le en contact avec le mélange de liquide et de vapeur, et réduisons successivement son volume; une partie de la vapeur passera à l'état liquide, et comme la chaleur latente qu'elle dégagera en se condensant sera absorbée à mesure par le corps B , la température restera constante et égale à t . Nous continuerons ainsi de réduire le volume jusqu'à ce que toute la chaleur fournie par le corps A dans la première partie de l'opération ait été rendue au corps B .

Soit AH le volume occupé alors par le mélange de vapeur et de liquide; la pression correspondante sera KH égale à GF ; la température restant égale à t pendant la réduction du volume de AF à AH , la loi de la pression entre ces deux limites sera représentée par la ligne KG parallèle à l'axe des abscisses.

Arrivé à ce point, le mélange de vapeur et de liquide sur lequel nous opérons, qui occupe le volume AH sous une pression KH , et à une température t , possède la même quantité absolue de chaleur que possédait le liquide au commencement de l'opération; si donc on éloigne le corps B et que l'on continue la condensation dans un vase imperméable à la chaleur, jusqu'à ce que le volume redevienne égal à AB , on aura la même quantité de matière occupant le même volume, et possédant la même quantité de chaleur qu'au commencement de l'opération; sa température et sa pression devront donc être aussi les mêmes qu'à cette époque; la température redeviendra ainsi égale à T , et la pression égale à CB ; la loi des pressions pendant cette dernière partie de l'opération sera donc donnée par une courbe passant par les points K et C , et la quantité d'action absorbée pendant la réduction du volume de AF à AB sera représentée par le rectangle $FHKG$ et le trapèze mixtiligne $BCKH$.

Si donc on retranche de la quantité d'action développée pendant la

dilatation, celle qui est absorbée pendant la compression, on aura pour différence la surface du parallélogramme mixtiligne CEGK, qui représentera la quantité d'action développée pendant la série entière d'opérations que nous avons décrite, et à la suite desquelles le liquide employé se retrouve dans son état primitif.

Mais il faut remarquer que tout le calorique communiqué par le corps A a passé dans le corps B, et que cette transmission s'est opérée sans qu'il y ait eu d'autre contact qu'entre corps de même température.

On prouverait, de la même manière que pour les gaz, qu'en répétant la même opération dans un ordre inverse, on peut faire passer de la chaleur du corps B au corps A, mais que ce résultat ne sera obtenu que par l'absorption d'une quantité d'action mécanique, égale à celle qu'a développée le passage de la même quantité de calorique du corps A au corps B.

Il résulte de ce qui précède qu'une quantité d'action mécanique, et qu'une quantité de chaleur pouvant passer d'un corps chaud à un corps froid, sont des quantités de même nature, et qu'il est possible de remplacer les unes par les autres; de la même manière qu'en mécanique un corps pouvant tomber d'une certaine hauteur, et une masse animée d'une vitesse, sont des quantités du même ordre, et que l'on peut transformer les unes dans les autres par des agents physiques.

Il suit de là également que la quantité d'action F développée par le passage d'une certaine quantité de chaleur C , d'un corps A entretenu à une température T à un corps B entretenu à une température t , par l'un des procédés que nous venons d'indiquer, est la même quel que soit le gaz ou le liquide employé, et est la plus grande qu'il soit possible de réaliser. Supposons en effet qu'en faisant passer par tout autre procédé la quantité de chaleur C du corps A au corps B, il fût possible de réaliser une quantité d'action mécanique plus grande F' , nous en emploierions une partie F , à ramener du corps B au corps A la quantité de chaleur C , par l'un des deux moyens que nous venons de décrire; la force vive F employée dans ce but serait égale, comme nous l'avons vu, à celle que développerait le passage de la même

quantité de chaleur C du corps A au corps B ; elle est donc d'après l'hypothèse plus petite que F' , il y aurait donc production d'une quantité d'action $F' - F$, qui serait créée de toutes pièces et sans consommation de chaleur, résultat absurde qui conduirait à la possibilité de créer gratuitement et d'une manière indéfinie de la force ou de la chaleur. L'impossibilité d'un pareil résultat me paraît pouvoir être acceptée comme un axiome fondamental de la mécanique ; la démonstration par les poulies, que Lagrange a donnée du principe des vitesses virtuelles, contre laquelle on n'a pas songé à élever d'objection, repose sur quelque chose d'analogue.

On démontrerait de la même manière qu'il n'existe pas de gaz ni de vapeur qui, employé par les procédés décrits à transmettre la chaleur d'un corps chaud à un corps froid, puisse développer une quantité d'action plus grande que tout autre gaz ou toute autre vapeur.

Nous admettrons donc comme base de nos recherches les principes suivans :

Le calorique en passant d'un corps, à un autre entretenu à une température moindre, peut donner lieu à la production d'une certaine quantité d'action mécanique ; il y a perte de force vive toutes les fois qu'il y a contact entre corps de température différente. L'effet produit *maximum* a lieu lorsque le passage du calorique du corps chaud au corps froid se fait par l'un des moyens que nous venons de décrire. Nous ajouterons qu'il se trouve être indépendant de la nature chimique du liquide ou du gaz employé, de sa quantité et de sa pression ; en sorte que la quantité d'action *maximum* que peut développer le passage d'une quantité déterminée de chaleur d'un corps chaud à un corps froid, est indépendante de la nature des agens qui servent à la réaliser.

§ III.

Nous allons maintenant traduire analytiquement les opérations diverses que nous avons décrites dans le paragraphe précédent ; nous

en déduirons l'expression de la quantité d'action *maximum* que produit le passage d'une quantité donnée de chaleur, d'un corps entretenu à une température déterminée à un corps entretenu à une température moindre, et nous arriverons à des relations nouvelles entre le volume, la pression, la température et la quantité absolue de chaleur ou le calorique latent, des corps solides, liquides ou gazeux.

Reprenons nos deux corps A et B, et supposons que la température t du corps B soit inférieure d'une quantité infiniment petite dt à la température t du corps A. Nous supposerons d'abord que ce soit un gaz qui serve à la transmission du calorique du corps A au corps B. Soit v_0 le volume du gaz sous la pression p_0 et à la température t_0 ; soient p et v le volume et la pression du même poids du gaz à la température t du corps A. La loi de Mariotte, combinée avec celle de Gay-Lussac, établit entre ces quantités diverses la relation

$$pv = \frac{p_0 v_0}{267 + t_0} (267 + t),$$

ou posant, pour simplifier, $\frac{p_0 v_0}{267 + t_0} = R$:

$$pv = R(267 + t).$$

Le corps A est mis en contact avec le gaz. Soit $me = v$, $ae = p$ (fig. 3). Si l'on dilate le gaz d'une quantité infiniment petite $dv = eg$, la température restera constante à cause de la présence de la source de chaleur A; la pression diminuera et deviendra égale à l'ordonnée bg . Maintenant, on écarte le corps A et l'on dilate le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, d'une quantité infiniment petite gh , jusqu'à ce que la chaleur devenue latente abaisse la température du gaz d'une quantité infiniment petite dt , et l'amène ainsi à la température $t - dt$ du corps B. Par suite de cet abaissement de température, la pression diminuera plus rapidement que dans la première partie de l'opération, et deviendra ch . Nous approchons maintenant le corps B et nous réduisons le volume mh d'une quantité infiniment petite fh , et calculée de façon à ce que pendant cette compression, le gaz rende

au corps B toute la chaleur qu'il a puisée dans le corps A pendant la première partie de l'opération. Soit fd la pression correspondante; cela fait, nous éloignons le corps B et nous continuons de comprimer le gaz jusqu'à ce qu'il ait repris le volume me . Alors la pression sera redevenue égale à ae comme nous l'avons démontré dans le paragraphe précédent, et l'on prouvera aussi de la même manière que le quadrilatère $abcd$ sera la mesure de la quantité d'action produite par la transmission au corps B de la chaleur puisée dans le corps A pendant la dilatation du gaz.

Or, il est aisé de démontrer que ce quadrilatère est un parallélogramme; cela résulte des valeurs infiniment petites attribuées aux variations de volume et de pression: imaginons en effet que par chacun des points du plan sur lequel est tracé le quadrilatère $abcd$, on élève des perpendiculaires à ce plan, et que l'on porte sur chacune d'elles, à partir de leur pied, deux quantités T et Q, la première égale à la température, la seconde à la quantité absolue de chaleur que possède le gaz, lorsque le volume et la pression ont la valeur que leur assignent l'abscisse v et l'ordonnée p qui correspondent à chaque point.

Les lignes ab et cd appartiennent aux projections de deux courbes d'égalité de température passant par deux points infiniment voisins, pris sur la surface des températures; ab et cd sont donc parallèles, ad et bc seront aussi les projections de deux courbes pour lesquelles $Q = \text{const.}$, et qui passeraient aussi par deux points infiniment voisins, pris sur la surface $Q = f(p, v)$, ces deux éléments sont donc aussi parallèles; le quadrilatère $abcd$ est donc un parallélogramme, et il est aisé de voir que son aire s'obtiendra en multipliant la variation du volume pendant le contact du gaz avec le corps A ou le corps B, c'est-à-dire eg ou son égal fh , par la différence bn des pressions supportées pendant ces deux opérations, et correspondantes à la même valeur du volume v . Or, eg ou fh étant les différentielles du volume, sont égaux à dv ; bn s'obtiendra en différentiant l'équation $p v = R(267 + v)$ en supposant v constant; on aura donc $bn = dp = R \frac{dt}{v}$.

La quantité d'action développée aura donc pour expression $R \frac{dt dv}{v}$.

Il reste à déterminer la quantité de chaleur nécessaire pour produire cet effet; elle est égale à celle que le gaz a puisée dans le corps Λ , pendant que son volume s'est accru de dv en conservant la même température t ; or, Q étant la quantité absolue de chaleur que possède le gaz, devra être une certaine fonction de p et de v , pris comme variables indépendantes, la quantité de chaleur absorbée par le gaz sera donc

$$dQ = \frac{dQ}{dv} dv + \frac{dQ}{dp} dp;$$

mais la température restant constante pendant la variation du volume, on a

$$vdp + pdv = 0, \quad \text{d'où} \quad dp = -\frac{p}{v} dv,$$

et par suite

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv} - \frac{p}{v} \frac{dQ}{dp} \right) dv.$$

Divisant l'effet produit par cette valeur de dQ , nous aurons

$$\frac{Rdt}{v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}}$$

pour l'expression de l'effet produit *maximum* que peut développer le passage d'une quantité de chaleur égale à l'unité, d'un corps entretenu à la température t à un corps entretenu à la température $t - dt$.

Nous avons démontré que cette quantité d'action développée est indépendante de l'agent qui a servi à transmettre la chaleur; elle est donc la même pour tous les gaz et ne dépend pas non plus de la quantité pondérable du corps employé; mais rien ne prouve qu'elle soit indépendante de la température; $v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}$ doit donc être égal à une fonction inconnue de t qui est la même pour tous les gaz.

Or, à cause de l'équation $p.v = R (267. + t)$; t est lui-même fonction du produit $p.v$, on a donc l'équation aux différentielles partielles

$$v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp} = F(p.v);$$

elle a pour intégrale

$$Q = f(p.v) - F(p.v) \log [(hyp) p].$$

On ne change rien à la généralité de cette formule en remplaçant ces deux fonctions arbitraires du produit $p.v$ par des fonctions B et C de la température, multipliées par le coefficient R : on aura ainsi

$$Q = R(B - C \log p).$$

Il est aisé de vérifier que cette valeur de Q satisfait à toutes les conditions auxquelles elle est assujettie; on a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dv} &= R \left(\frac{dB}{dt} \frac{p}{R} - \log p \frac{dC}{dt} \frac{p}{R} \right) \\ \frac{dQ}{dp} &= R \left(\frac{dB}{dt} \frac{v}{R} - \log p \frac{dC}{dt} \frac{v}{R} - C \frac{1}{p} \right); \end{aligned}$$

on tire de là

$$v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp} = CR,$$

et par suite,

$$\frac{Rdt}{v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}} = \frac{dt}{C}.$$

La fonction C qui multiplie le logarithme de la pression dans la valeur de Q est, comme on voit, d'une haute importance; elle est indépendante de la nature des gaz, et n'est fonction que de la tempéra-

ture; elle est essentiellement positive et sert de mesure à la quantité d'action *maximum* que peut développer la chaleur.

Nous avons vu que des quatre quantités Q , t , p et v , deux étant connues, les deux autres s'ensuivent; elles doivent donc être liées entre elles par deux équations; l'une d'elles,

$$pv = R(267 + t),$$

résulte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac combinées. L'équation

$$Q = R(B - C \log p),$$

que nous déduisons de notre théorie, est la seconde. Toutefois, la détermination numérique des changements qu'éprouvent les gaz quand on fait varier d'une manière arbitraire le volume et la pression, exigent que l'on connaisse les fonctions B et C .

Nous verrons plus tard que l'on peut obtenir une valeur approchée de la fonction C dans une étendue considérable de l'échelle thermométrique; d'ailleurs, étant déterminée pour un gaz, elle le sera pour tous. Quant à la fonction B , elle peut varier d'un gaz à l'autre; cependant, il est probable qu'elle est la même pour tous les gaz simples: c'est au moins ce qui paraît résulter de ce que l'expérience indique, qu'ils ont tous la même capacité pour la chaleur.

Reprenons l'équation

$$Q = R(B - C \log p).$$

Comprimons un gaz occupant le volume v sous la pression p jusqu'à ce que le volume devienne v' , et laissons-le se refroidir jusqu'à ce que sa température revienne au même point. Soit p' la nouvelle valeur de la pression; soit Q' la nouvelle valeur de Q , on aura

$$Q - Q' = RC \log \frac{p'}{p} = RC \log \frac{v}{v'}.$$

La fonction C étant la même pour tous les gaz, on voit que *des volumes égaux de tous les fluides élastiques, pris à la même température et sous la même pression, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité absolue de chaleur.* C'est la loi que M. Dulong a déduite de l'expérience directe.

Cette équation démontre en outre que *lorsqu'un gaz varie de volume sans changer de température, les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par ce gaz sont en progression arithmétique, si les accroissemens ou réductions de volume sont en progression géométrique.* M. Carnot énonce également ce résultat dans l'ouvrage cité.

L'équation

$$Q - Q' = RC \log \left(\frac{v}{v'} \right)$$

exprime une loi plus générale; elle tient compte de toutes les circonstances qui peuvent influencer sur le phénomène, telles que la pression, le volume et la température.

En effet, puisque

$$R = \frac{p_0 v_0}{267 + t_0} = \frac{p v}{267 + t},$$

on a

$$Q - Q' = \frac{267 + t}{p v} C \log \frac{v}{v'}.$$

Cette équation fait connaître l'influence de la pression; elle démontre que *des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume dégagent ou absorbent des quantités de chaleur proportionnelles à la pression.*

Ce résultat explique comment la rentrée subite de l'air dans le vide de la machine pneumatique ne dégage pas une quantité sensible de chaleur. Le vide de la machine pneumatique n'est autre chose qu'un volume v de gaz dont la pression p est très petite; si on laisse rentrer

l'air atmosphérique, sa pression p deviendra égale subitement à la pression p' de l'atmosphère, son volume v sera réduit à v' , et l'expression de la chaleur dégagée sera

$$C \frac{pv}{267+t} \log \frac{v}{v'} = C \frac{pv}{267+t} \log \frac{p'}{p}.$$

La chaleur dégagée par la rentrée de l'air atmosphérique dans le vide sera donc ce que devient cette expression quand on y fait p très petit; on trouve alors que $\log \frac{p'}{p}$ devient très grand, mais le produit de p par $\log \frac{p'}{p}$ n'en est pas moins très petit; on a, en effet,

$$p \log \frac{p'}{p} = p \log p' - p \log p = p (\log p' - \log p),$$

quantité qui converge vers zéro, quand p diminue.

La chaleur dégagée sera donc d'autant plus petite, que la pression dans le récipient sera plus faible, et elle se réduira à zéro quand le vide sera parfait.

Nous ajouterons que l'équation

$$Q = R (B - C \log p),$$

donne la loi des caloriques spécifiques à pression constante et à volume constant. Le premier a pour expression

$$R \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt} \log p \right),$$

le second

$$R \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt} \log p - C \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right),$$

égal à

$$R \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt} \log p - \frac{C}{267+t} \right).$$

Ils s'obtiennent, le premier en différentiant Q par rapport à t , en supposant p constant; le second, en supposant ν constant. Si l'on prend des volumes égaux de différens gaz à la même température et sous la même pression, la quantité R sera la même pour tous, et par suite on voit que l'excès du calorique spécifique à pression constante sur le calorique spécifique à volume constant, est le même pour tous, et égal à $\frac{R}{267 + t} C$.

§ IV.

La même méthode de raisonnement appliquée aux vapeurs nous permettra d'établir une relation nouvelle entre leur calorique latent, leur volume et leur pression.

Nous avons montré dans le second paragraphe comment un liquide en passant à l'état de vapeur, peut servir à transmettre le calorique d'un corps entretenu à une température T , à un corps entretenu à une température moindre t , et comment cette transmission peut développer de la force motrice.

Supposons que la température du corps B soit inférieure d'une quantité infiniment petite dt à la température du corps A . Nous avons vu que si cb (fig. 4) représente la pression de la vapeur du liquide, correspondante à la température t du corps A , et fg celle qui correspond à la température $t - dt$ du corps B , bh l'accroissement de volume dû à la vapeur formée en contact avec le corps A , hk celui qui est dû à la vapeur formée après que le corps A a été éloigné, et dont la formation a abaissé la température d'une quantité dt , nous avons vu, dis-je, que la quantité d'action développée par la transmission du calorique latent fourni par le corps A , de celui-ci au corps B , a pour mesure le quadrilatère $cdef$. Or, cette surface est égale, en négligeant les infiniment petits du second ordre, au produit du volume cd par la différentielle de la pression $dh - ek$. Nommant p la pression de la vapeur du liquide qui correspond à la température t , p sera une fonction de t , et l'on aura $dh - ek = \frac{dp}{dt} dt$.

cd sera égal à l'accroissement de volume qu'éprouve l'eau en passant de l'état liquide à l'état gazeux sous la pression p et à la température correspondante. Si l'on nomme ρ la densité du liquide, et δ celle de la vapeur, ν le volume de la vapeur formée, $\delta\nu$ en sera le poids, et $\frac{\delta\nu}{\epsilon}$ sera le volume du liquide évaporé. L'accroissement de volume dû à la formation d'un volume ν de vapeur sera donc

$$\nu \left(1 - \frac{\delta}{\epsilon} \right).$$

L'effet produit sera donc

$$\left(1 - \frac{\delta}{\epsilon} \right) \nu \frac{dp}{dt} dt.$$

La chaleur qui a servi à produire cette quantité d'action est le calorique latent du volume ν de vapeur formée; soit k une fonction de t représentant le calorique latent que contient l'unité de volume de la vapeur fournie par le liquide, sujet de l'expérience, à la température t , et sous la pression correspondante, le calorique latent du volume ν sera $k\nu$, et le rapport de l'effet produit à la chaleur dépensée aura pour expression

$$\frac{\left(1 - \frac{\delta}{\epsilon} \right) \frac{dp}{dt} dt}{k}.$$

Nous avons démontré qu'il est le plus grand qu'il soit possible d'obtenir, qu'il est indépendant de la nature du liquide employé et le même que celui que nous avons obtenu par l'emploi des gaz permanents; or, nous avons vu que celui-ci a pour expression $\frac{dt}{C}$, C étant une fonction de t indépendante de la nature des gaz, nous aurons donc également

$$\frac{\left(1 - \frac{\delta}{\epsilon} \right) \frac{dp}{dt} dt}{k} = \frac{dt}{C}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) \frac{dp}{dt}}{k} = \frac{1}{C}, \quad \text{d'où} \quad k = \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) \frac{dp}{dt} C.$$

Pour la plupart des vapeurs, le rapport $\frac{\delta}{\rho}$ de la densité de la vapeur à celle du liquide qui l'a formée est négligeable devant l'unité, tant que la température n'est pas très élevée; on aura donc sensiblement

$$k = C \frac{dp}{dt}.$$

Cette équation exprime que *le calorique latent que renferment des volumes égaux de vapeur de différens liquides à la même température et sous la pression correspondante, est proportionnel au coefficient $\frac{dp}{dt}$ de la pression par rapport à la température.*

Il résulte de là, que le calorique latent que renferment les vapeurs des liquides qui ne commencent à bouillir qu'à de hautes températures, comme le mercure, par exemple, est très faible, puisque pour ces vapeurs la quantité $\frac{dp}{dt}$ est très petite.

Nous n'insisterons pas sur les conséquences qui résultent de l'équation

$$k = \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) \frac{dp}{dt} C.$$

Nous nous bornerons à remarquer que si, comme tout porte à le croire, C et $\frac{dp}{dt}$ ne deviennent infinis pour aucune valeur de la température, k deviendra nul quand on aura $\delta = \rho$, c'est-à-dire que lorsque la pression sera assez forte et la température assez élevée pour que la densité de la vapeur soit égale à celle du liquide, le calorique latent se réduira à zéro.

§ V.

Tous les corps de la nature varient de volume par des changemens dans leur température et leur pression ; les liquides et les solides n'échappent pas à cette loi ; ils peuvent également servir à développer la puissance motrice de la chaleur ; on a proposé de les substituer à la vapeur d'eau pour utiliser cette force motrice ; on s'est même quelquefois trouvé fort bien de leur emploi, notamment quand il fallait développer un effort momentané très considérable, mais s'exerçant dans d'étroites limites.

Dans ces sortes de corps comme dans les gaz, on peut remarquer que des quatre quantités, le volume v , la pression p , la température T , et la quantité absolue de chaleur Q , deux étant déterminées, les autres s'ensuivent ; si donc on prend deux d'entre elles, p et v , par exemple, comme variables indépendantes, les deux autres T et Q , pourront être considérées comme fonctions de celles-ci.

Des expériences directes sur l'élasticité et sur la dilatabilité des corps peuvent faire connaître comment les quantités T , p et v , varient ensemble, c'est ainsi que pour les gaz, la loi de Mariotte relativement à leur élasticité, et la loi de Gay-Lussac sur leur dilatabilité, conduisent à l'équation

$$pv = R (267 + t);$$

il ne resterait alors qu'à déterminer Q en fonction de p et de v .

Il existe, entre les fonctions T et Q , une relation que l'on peut déduire de principes analogues à ceux que nous venons d'établir. Augmentons en effet d'une quantité infiniment petite dT la température du corps, en empêchant le volume de croître, alors la pression augmentera ; si l'on représente le volume v par l'abscisse ab (fig. 5), et la pression primitive par l'ordonnée bd , cet accroissement de pression

pourra être représenté par la quantité df , qui sera du même ordre que l'accroissement de température dT , auquel elle est due, c'est-à-dire infiniment petite.

Maintenant, nous approchons une source de chaleur A entretenue à la température $T + dT$, et nous laissons le volume v s'accroître d'une quantité bc , la présence de la source A entretenue à la température $T + dT$, empêche la température de décroître. Pendant ce contact, la quantité Q de chaleur que possède le corps s'accroîtra d'une quantité dQ qui sera puisée dans la source A. Ensuite, nous éloignerons la source A, et nous ferons refroidir le corps donné d'une quantité dT en lui conservant le volume ac . Alors la pression diminuera d'une quantité infiniment petite ge .

La température du corps se trouvant ainsi réduite à T, qui est celle de la source de chaleur B, nous approchons celle-ci, et nous réduisons le volume du corps d'une quantité bc , de façon que toute la chaleur développée par la diminution de volume soit absorbée par le corps B, et que la température reste égale à sa valeur primitive T. Le volume V redevient aussi ce qu'il était au commencement de l'opération, on peut être certain que la pression reprendra sa valeur primitive bd , et qu'il en sera de même de la quantité absolue de chaleur Q.

Si maintenant on joint par des lignes droites les quatre points f, g, e, d , on formera un quadrilatère dont l'aire mesurera la quantité d'action développée pendant l'opération décrite. Or, il est aisé de voir que fg et de sont deux éléments infiniment voisins pris sur deux courbes infiniment voisines dont les équations seraient $T + dT = \text{const.}$, et $T = \text{const.}$ Ils doivent donc être considérés comme parallèles; les deux ordonnées qui terminent le quadrilatère dans l'autre sens étant aussi parallèles, la figure est parallélogrammique, et a pour mesure $bc \times df$.

Or, fd n'est autre chose que l'accroissement qu'éprouve la pression p , le volume v restant constant, et T devenant $T + dT$. On a donc

$$df = \frac{dp}{dT} dT,$$

d'où

$$fd = \frac{1}{\frac{dp}{dT}} dT.$$

Et bc étant l'accroissement de volume $d\nu$

$$fd \times bc = \frac{d\nu \cdot dT}{\frac{dp}{dT}}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la consommation de chaleur qu'a nécessité la production de cette quantité d'action mécanique.

D'abord nous avons élevé la température du corps soumis à l'expérience d'une quantité dT sans changer son volume primitif ν , puis, lorsqu'il est devenu $\nu + d\nu$, nous avons abaissé sa température de la même quantité dT sans faire varier son volume $\nu + d\nu$. Or, il est aisé de voir que cette double opération peut être effectuée sans perte de chaleur; supposons en effet que n étant un nombre indéfiniment grand, l'intervalle de température dT soit partagé en un nombre n de nouveaux intervalles $\frac{dT}{n}$, et que l'on ait $n + 1$ sources de chaleur entretenues aux températures $T, T + \frac{dT}{n}, T + \frac{2dT}{n}, \dots, T + \frac{(n-1)dT}{n}$ et $T + dT$.

Pour porter le corps sur lequel nous opérons, de la température T à la température $T + dT$, nous le mettons successivement en contact avec la seconde, la troisième, la $(n + 1)^{\text{ième}}$ de ces sources, jusqu'à ce qu'il ait acquis la température de chacune d'elles. Lorsqu'au contraire le volume ν du corps s'étant accru de $d\nu$, on voudra lui rendre la température T , on le mettra successivement en contact avec la $n^{\text{ième}}$, la $(n - 1)^{\text{ième}}$, la première de ces sources, jusqu'à ce qu'il ait acquis la température de chacune d'elles. On rendra alors à ces sources la chaleur qui leur a été empruntée dans la première partie de l'opération, car on pourra négliger les différences d'un ordre de grandeur

inférieur, provenant de ce que le calorique spécifique du corps aura pu changer par suite des variations de v et Q .

Chacune de ces sources n'aura donc rien gagné ni perdu, à l'exception toutefois de la source dont la température est $T + dT$, qui aura perdu la chaleur nécessaire pour élever la température du corps sur lequel nous opérons de $T + \frac{(n-1)dT}{n}$ à $T + dT$; et de la source entretenue à la température T , qui aura gagné la chaleur nécessaire pour abaisser la température du même corps de $T + \frac{dT}{n}$ à T . Si l'on suppose n infiniment grand, ces quantités de chaleur pourront être négligées.

On voit donc que, lorsque la température du corps dont il s'agit étant ainsi réduite à T , ce corps sera mis en contact avec la source de chaleur B , il n'aura gagné depuis le commencement de l'opération, que la chaleur qui lui a été communiquée par la source A . Par suite de la réduction de son volume en contact avec le corps B , il se retrouvera avoir le même volume et la même température qu'à l'origine; les quantités Q et P auront donc aussi repris leur valeur primitive; on peut donc être certain que toute la chaleur empruntée à la source A , et rien que cette chaleur, aura été rendue au corps B .

Il résulte de là que l'effet produit

$$\frac{dv dT}{dT dp}$$

est dû à la transmission de la chaleur absorbée par le corps soumis à l'expérience pendant son contact avec la source A , et qui s'est écoulée ensuite dans la source B .

Pendant le contact avec la source A , la température est restée constante; d'où il suit que les variations dp et dv de la pression et du volume sont liées par la relation

$$\frac{dT}{dp} dp + \frac{dT}{dv} dv = 0.$$

Ces variations dp et dv en occasionent une dans la quantité absolue de chaleur Q , qui a pour expression

$$dQ = \frac{dQ}{dp} dp + \frac{dQ}{dv} dv = dv \left[\frac{dQ}{dv} - \frac{dQ}{dp} \left(\frac{dT}{dp} \right) \right];$$

telle est la quantité de chaleur consommée pour produire l'effet que nous venons de calculer. L'effet produit par une quantité de chaleur égale à l'unité sera donc

$$\frac{dT}{dv} \cdot \frac{dQ}{dp} - \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{dT}{dv}$$

On démontrera, comme pour les gaz, que cet effet produit est le plus grand de tous ceux qu'il est possible de réaliser; et tous les corps de la nature pouvant être employés, de la manière que nous venons d'indiquer, à produire cet effet *maximum*, il faut nécessairement qu'il soit le même pour tous.

Lorsque nous avons appliqué cette théorie spécialement aux gaz, nous avons nommé $\frac{1}{C}$ le coefficient de dT dans l'expression de cette quantité d'action *maximum*; on aura donc pour tous les corps de la nature, solides, liquides ou gazeux, l'équation

$$\frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{dT}{dv} = C,$$

dans laquelle C est une fonction de la température qui est la même pour tous.

Pour les gaz on a

$$T = - 267 + \frac{1}{R} p v,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v}{R} \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dv} = \frac{p}{R};$$

L'équation précédente, appliquée aux gaz, prend donc la forme

$$\nu \frac{dQ}{d\nu} - p \frac{dQ}{dp} = RC = F(p, \nu);$$

c'est l'équation à laquelle nous sommes déjà arrivés directement, et qui a pour intégrale

$$Q = R(B - C \log p);$$

celle de l'équation générale

$$\frac{dQ}{d\nu} \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} \frac{dT}{d\nu} = C$$

est de la forme

$$Q = F(T) - C\phi(p, \nu);$$

$F(T)$ est une fonction arbitraire de la température, et $\phi(p, \nu)$ une fonction particulière satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{d\nu} \frac{d\phi}{dp} - \frac{dT}{dp} \frac{d\phi}{d\nu} = 1. \quad (\text{Voyez la note ci-après.})$$

Nous allons maintenant déduire diverses conséquences de l'équation générale à laquelle nous sommes parvenus.

Nous avons vu précédemment que lorsque l'on comprime un corps d'une quantité $d\nu$, la température restant constante, la chaleur dégagée par la condensation est égale à

$$dQ = d\nu \left[\frac{dQ}{d\nu} - \frac{dQ}{dp} \left(\frac{dT}{d\nu} \right) \right];$$

et comme $\frac{dQ}{dv} \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} \frac{dT}{dv} = C$, l'expression précédente prend la forme

$$dQ = dv \frac{C}{\left(\frac{dT}{dp}\right)} = - dp \frac{C}{\left(\frac{dT}{dv}\right)}.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$dQ = - dp C \frac{dv}{dT};$$

$\frac{dv}{dT}$ est le coefficient différentiel du volume par rapport à la température, la pression restant constante.

Nous sommes donc conduits ainsi à cette loi générale qui s'applique à tous les corps de la nature, solides, liquides ou gazeux : *si l'on augmente d'une petite quantité la pression supportée par différens corps pris à la même température, il s'en dégagera des quantités de chaleur qui seront proportionnelles à leur dilatabilité par la chaleur.*

Ce résultat est la conséquence la plus générale que l'on déduit de cet axiome : qu'il est absurde de supposer que l'on puisse créer gratuitement et de toutes pièces de la force motrice ou de la chaleur.

§ VI.

La fonction de la température C est, comme on voit, d'une grande importance, à cause du rôle qu'elle joue dans la théorie de la chaleur; elle entre dans l'expression du calorique latent que renferment tous les corps et qu'en dégage la pression. Malheureusement les expériences manquent pour déterminer les valeurs de cette fonction correspondantes à toutes les valeurs de la température; pour $t = 0$, on peut le faire de la manière suivante.

M. Dulong a fait voir que l'air et tous les autres gaz pris à la température de 0° , et sous la pression $0^m,76$ de mercure, étant comprimés

de $\frac{1}{267}$ de leur volume, dégagent une quantité de chaleur capable d'élever de 0,421 le même volume d'air atmosphérique.

Supposons que nous opérions sur un kilogramme d'air occupant un volume $\nu = 0,770$ de mètre cube, sous la pression de l'atmosphère p , équivalente à 10230 kilogrammes par mètre carré; on a

$$p\nu = R(267 + t),$$

et

$$Q = R(B - C \log p).$$

Si l'on fait varier subitement ν d'une quantité infiniment petite $d\nu$, sans que la quantité absolue de chaleur Q varie, on aura

$$pd\nu + \nu dp = Rdt,$$

et

$$0 = R \left(\frac{dB}{dt} - \log p \frac{dC}{dt} \right) dt - RC \frac{dp}{p},$$

ou bien

$$\frac{dt}{C} R \left(\frac{dB}{dt} - \log p \frac{dC}{dt} \right) = R \frac{dp}{p} = \frac{R}{p} \left(\frac{Rdt - pd\nu}{\nu} \right) = \frac{Rdt - pd\nu}{267 + t}.$$

Or, $R \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt} \log p \right)$ étant la différentielle partielle de Q par rapport à t , p restant constant, n'est autre chose que le calorique spécifique de l'air à pression constante, c'est le nombre d'unités de chaleur nécessaire pour élever d'un degré un kilogramme d'air sous la pression atmosphérique; on a donc

$$R \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt} \log p \right) = 0,267.$$

Remplaçant alors $d\nu$ par $-\frac{\nu}{267}$ et dt par 0,421, on trouve enfin

$$\frac{1}{C} = 1,41.$$

C'est l'effet *maximum* que peut produire une quantité de chaleur égale à celle qui élèverait de 1° un kilogramme d'eau pris à zéro, passant d'un corps entretenu à 1° à un corps entretenu à 0°. Il est exprimé en kilogrammes élevés à un mètre.

Ayant la valeur de C qui correspond à $t = 0$, il est intéressant de savoir si, à partir de ce point, C croît ou décroît, et dans quelle proportion. Une expérience de MM. Laroche et Bérard sur les variations qu'éprouve le calorique spécifique de l'air quand on fait varier la pression, permet de calculer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dC}{dt}$.

En effet, d'après nos formules, le calorique spécifique de l'air sous deux pressions p et p' varie de $R \frac{dC}{dt} \log \frac{p}{p'}$; égalant cette quantité à la différence des caloriques spécifiques, telle qu'on la déduit des résultats de MM. Laroche et Bérard, on trouve, en prenant la moyenne de deux expériences,

$$\frac{dC}{dt} = 0,002565.$$

Dans ces expériences, l'air entrant dans le calorimètre à la température de 96°,90, et en sortait à celle de 22°,83. 0,002565 est donc la valeur moyenne du coefficient différentiel $\frac{dC}{dt}$ entre ces deux températures.

Ce résultat nous apprend qu'entre ces limites la fonction C croît, mais très lentement; par suite la quantité $\frac{1}{C}$ diminue; il suit de là que l'effet produit par la chaleur diminue dans les hautes températures, quoique d'une manière très lente.

La théorie des vapeurs va nous fournir de nouvelles valeurs de la fonction C à d'autres températures. Reprenons la formule

$$\frac{1}{C} = \frac{\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) \frac{dp}{dt}}{k},$$

que nous avons démontrée dans le paragraphe IV. Si nous négligeons

la densité de la vapeur devant celle du fluide, cette formule se réduit à

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{dp}{dt}}{k}.$$

Remarquons, en passant, qu'à la température de l'ébullition, $\frac{dp}{dt}$ est à peu près le même pour toutes les vapeurs; C lui-même varie peu avec la température, en sorte que k est lui-même à peu près constant. Ceci explique comment des physiciens ont cru remarquer qu'à la température de l'ébullition, des volumes égaux de toutes les vapeurs contenaient la même quantité de calorique latent; mais on voit en même temps que cette loi n'est qu'approchée, puisqu'elle suppose que C et $\frac{dp}{dt}$ sont les mêmes pour toutes les vapeurs à la température de l'ébullition.

Des expériences faites par divers physiciens permettent de calculer pour différens liquides les valeurs de k et de $\frac{dp}{dt}$, qui correspondent à la température de l'ébullition; nous pourrons donc en conclure les valeurs correspondantes de $\frac{1}{C}$. Nous avons ainsi pu dresser la table suivante :

NOMS DES LIQUIDES.	VALEUR en atmosphère de $\frac{dp}{dt}$ à la tempéra- ture de l'ébullit	DENSITÉ de la vapeur à la température de l'ebul., la densité de l'air étant 1.	QUANTITÉ de chaleur latente comprise dans un kilogr. de vapeur.	TEMPÉRATURE de l'ébullition.	VALEURS correspondantes de $\frac{1}{C}$.
Éther sulfurique.	$\frac{1}{28,12}$	2,280	90,8	35,5	1,365
Alcool.....	$\frac{1}{25,19}$	1,258	207,7	78,8	1,208
Eau.....	$\frac{1}{29,1}$	0,451	543,0	100	1,115
Essence de téréb.	$\frac{1}{30}$	3,207	76,8	156,8	1,076

Ces résultats confirment d'une manière frappante la théorie que nous exposons ; ils montrent que C augmente lentement avec la température, comme nous l'avons déjà reconnu : nous avons vu que pour $t = 0$, $\frac{1}{C} = 1,41$, d'où $C = 0,7092$, ce résultat est déduit d'expériences sur la vitesse du son. Nous trouvons ici qu'en partant d'expériences sur la vapeur d'eau, pour $t = 100^\circ$, $\frac{1}{C} = 1,115$, d'où $C = 0,8969$; C s'est donc accru de 0 à 100° de 0,187, ce qui donne pour moyenne du coefficient différentiel entre ces deux limites,

$$\frac{dC}{dt} = 0,00187.$$

La moyenne de deux expériences dues à MM. Laroche et Bérard nous a donné, entre les limites $22^\circ,83$ et $96,90$, pour valeur moyenne de $\frac{dC}{dt}$, la quantité

$$0,002565.$$

Ces deux résultats diffèrent peu l'un de l'autre, et leur divergence s'explique assez quand on réfléchit au nombre et à la variété des expériences auxquelles on a dû emprunter les données dont ils résultent.

Il existe un autre moyen de calculer les valeurs de $\frac{1}{C}$ d'une manière approximative entre des limites étendues de la température; il faut pour cela admettre que la quantité de calorique contenue dans un même poids de vapeur d'eau est la même, quelles que soient la température et la pression correspondante, et de plus, que les lois relatives à la compression et à la dilatation des gaz permanens, s'appliquent également aux vapeurs; en adoptant ces lois, qui ne sont qu'approchées, on peut dans la formule

$$\frac{1}{C} = \frac{dp}{K dt},$$

exprimer K en fonction de t ; $\frac{dp}{dt}$ se déduira, de 0 à 100° d'anciennes

expériences dues à divers physiciens, et depuis 100° jusqu'à 224 des expériences récentes de MM. Arago et Dulong.

On trouve ainsi pour

$t = 0, \frac{1}{C} = 1,586$	} Nous avons déjà trouvé pour les valeurs de $\frac{1}{C}$ correspondantes aux mêmes valeurs de t :	Valeurs de $\frac{1}{C}$
$t = 35,5, \frac{1}{C} = 1,292$		1,410
$t = 78,8, \frac{1}{C} = 1,142$		1,365
$t = 100, \frac{1}{C} = 1,102$		1,208
$t = 156,8, \frac{1}{C} = 1,072$		1,106
		1,078

Ces dernières, déduites d'expériences sur le son, les vapeurs d'éther sulfurique, d'alcool, d'eau et d'essence de térébenthine, présentent, avec les premières, un accord assez satisfaisant.

Ces coïncidences remarquables obtenues par des opérations numériques faites sur un grand nombre de données diverses, empruntées à des phénomènes fort différens, nous paraissent ajouter beaucoup à l'évidence de notre théorie.

§ VII.

La fonction C est, comme l'on voit, d'une haute importance : elle est le lien commun de tous les phénomènes que produit la chaleur sur les corps solides, liquides ou gazeux ; il serait à désirer que des expériences comportant une grande exactitude, telles que des recherches sur la propagation du son dans les gaz pris à des températures différentes, fissent connaître cette fonction avec toute la certitude désirable ; elle servirait à la détermination de plusieurs autres élémens importans de la théorie de la chaleur, à l'égard desquels l'expérience n'a conduit qu'à des approximations insuffisantes, ou sur lesquels elle n'a encore rien appris. Dans ce nombre, nous rangerons la

chaleur dégagée par la compression des corps solides ou liquides ; la théorie que nous avons exposée nous permet de la déterminer numériquement pour toutes les valeurs de la température pour lesquelles la fonction C est connue d'une manière suffisamment exacte, c'est-à-dire depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 224^{\circ}$.

Nous avons vu que la chaleur dégagée par une augmentation de pression dp , est égale à la dilatation par la chaleur du corps soumis à l'expérience, multipliée par C . Pour de l'air pris à zéro, la quantité de chaleur dégagée peut se déduire immédiatement des expériences sur le son, de la manière suivante.

M. Dulong a fait voir qu'une compression de $\frac{1}{267}$ élève de $0^{\circ},421$ la température d'un volume d'air pris à zéro. Or, les $0,267$ d'unité de chaleur nécessaires pour élever de 1° , un kilogramme d'air pris à zéro sous pression constante, sont égaux à la chaleur nécessaire pour maintenir à zéro la température du gaz dilaté de $\frac{1}{267}$ de son volume, plus la chaleur nécessaire pour élever de 1° le volume dilaté maintenu constant; cette dernière est égale à $\frac{1}{0,421}$ de la première : leur somme est donc égale à la première multipliée par $1 + \frac{0}{0,421}$; donc celle-ci, c'est-à-dire la chaleur nécessaire pour maintenir à zéro la température de 1 kil. d'air, dilaté de $\frac{1}{267}$ de son volume, est égale à $(0,267) : (1 + \frac{1}{0,421})$, ou à $0,07911$.

On arriverait au même résultat en appliquant la formule

$$Q = R (B - C \log p),$$

d'où

$$dQ = RC \frac{dv}{v},$$

en posant $C = \frac{1}{410}$, et en observant qu'une diminution de volume de $\frac{1}{267}$ correspond à un accroissement de pression égal à $\frac{1}{267}$ d'atmosphère.

Connaissant la chaleur que la compression dégage des gaz, pour avoir celle qu'une pression semblable dégagerait d'un corps quelconque, du fer par exemple, nous écrirons la proportion : 0,07911, chaleur dégagée par un volume d'air égal à 0,77 de mètre cube, soumis à un accroissement de pression égal à $\frac{1}{267}$ d'atmosphère, est à celle dégagée par un même volume de fer dans les mêmes circonstances, comme 0,00375, dilatabilité cubique de l'air, est à 0,00003663, dilatabilité cubique du fer. On trouve pour le second terme de la proportion le nombre 0,0007718. Or, un volume 0^m,77 de fer pèse 5996 kilogr.; la chaleur dégagée par un kilogr. sera donc de $\frac{0,007718}{5996}$; pour une pression d'une atmosphère, elle sera 267 fois plus considérable, ou égale à 0,00003436; divisant ce nombre par le calorique spécifique du fer rapporté à celui de l'eau, on aura la quantité dont une pression d'une atmosphère élève la température du fer; on voit qu'elle est trop faible pour pouvoir être appréciée par nos instrumens thermométriques.

§ VIII.

Nous n'insisterons pas davantage sur les conséquences qui résultent, pour la théorie de la chaleur, des résultats énoncés dans ce Mémoire : nous croyons utile seulement d'ajouter quelques mots sur l'emploi de la chaleur comme force motrice. M. S. Carnot, dans l'ouvrage déjà cité, nous paraît avoir posé les véritables bases de cette partie importante de la mécanique pratique.

Les machines à haute ou à basse pression sans détente, utilisent la force vive que peut développer le calorique contenu dans la vapeur, par son passage de la température de la chaudière à celle du condenseur; dans les machines à haute pression sans condenseur, tout se passe comme si elles étaient pourvues d'un condenseur dont la température serait 100°. On n'utilise donc dans celles-ci que le passage du calorique latent que contient la vapeur, de la température de la

chaudière à la température 100° . Quant au calorique sensible de la vapeur, il est entièrement perdu dans toutes les machines sans détente.

Il est utilisé en partie par les machines à détente dans lesquelles on laisse s'abaisser la température de la vapeur ; le cylindre enveloppe qui, dans les machines de Wolff à deux cylindres, a pour but de maintenir constante la température de la vapeur, fort utile pour diminuer les limites entre lesquelles varie la force motrice agissant sur les pistons, n'a qu'une influence fâcheuse quant à l'effet produit, comparé à la consommation de combustible.

Pour utiliser complètement la force motrice dont on peut disposer, il faudrait que la détente fût poussée jusqu'à ce que la température de la vapeur se réduisît à celle du condenseur ; mais des considérations pratiques tirées de la manière dont on utilise dans les arts la force motrice du feu, s'opposent à ce que l'on atteigne cette limite.

D'une autre part, nous avons démontré que l'emploi des gaz ou de tout autre liquide que l'eau, entre les mêmes limites de la température, n'ajouterait rien aux résultats déjà obtenus ; mais il résulte des considérations qui précèdent, que la température du feu étant supérieure de 1000° à 2000° à celle des chaudières, il y a une perte énorme de force vive au passage de la chaleur du foyer dans la chaudière. C'est donc uniquement de l'emploi du calorique à de hautes températures et de la découverte d'agens propres à en réaliser la force motrice, que l'on a lieu d'attendre des perfectionnemens importans dans l'art d'utiliser la puissance mécanique de la chaleur.

NOTE.

L'intégrale de l'équation générale

$$\frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} \frac{dT}{dv} = C,$$

est, comme nous avons vu,

$$Q = F(T) - C \varphi(p, v). \quad (1)$$

$F(T)$ est une fonction arbitraire de la température T , pouvant varier d'un corps à l'autre; C une fonction de la température qui est la même pour tous les corps de la nature, et $\varphi(p, v)$ une fonction particulière de p et de v satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{dv} \cdot \frac{d\varphi}{dp} - \frac{dT}{dp} \frac{d\varphi}{dv} = 1. \quad (2)$$

Cette fonction φ peut se déterminer de la manière suivante. Soit

$$\varphi = \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \varphi',$$

substituant dans l'équation (2), il vient

$$\frac{dT}{dv} \frac{d\varphi'}{dp} - \frac{dT}{dp} \frac{d\varphi'}{dv} = \frac{dT}{dp} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}};$$

on satisfait à cette équation en posant

$$\varphi' = \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \varphi'';$$

φ'' satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{dv} \frac{d\varphi''}{dp} - \frac{dT}{dp} \frac{d\varphi''}{dv} = \frac{dT}{dp} \frac{d}{dv} \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}},$$

on aura également

$$\phi'' = \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \phi'''$$

On voit ainsi que $\phi(p, v)$ est donné par une série de termes, dont chacun s'obtient au moyen de celui qui le précède, en le différentiant par rapport à v ,

multipliant par le rapport $\frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}}$, et intégrant le résultat par rapport à p . Le

premier terme de cette série étant $\int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}}$, on voit que la valeur de ϕ peut

être obtenue aisément; substituant cette valeur dans l'équation (1), on a pour expression de l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{dQ}{dv} \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} \frac{dT}{dv} = C,$$

la formule

$$Q = F(T) - C \left| \begin{array}{l} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Cette équation donne la loi des caloriques spécifiques et de la chaleur dégagée par les variations de volume et de pression de tous les corps de la nature, lorsque l'on connaît la relation qui existe entre la température, le volume et la pression.

